ВВЕДЕНИЕ

Условие каждого задания расчетно-графической работы сопровождается десятью рисунками и двумя таблицами числовых значений заданных величин.

Выбор вариантов совершается согласно с шифром студента.

ШИФР – это три последние цифры номера зачетной книжки. Варианты числовых значений заданных величин выбирают по первой цифре шифра (таблица 1) и по второй цифре шифра (таблица 2). Вариант рисунка выбирают по третьей (последней) цифре шифра.

Например, если номер зачетной книжки 09359, тогда шифр студента 359. Числовые значения заданных величин из таблицы 1 – по варианту 3, из таблицы 2- по варианту 5, а рисунок к заданию – по варианту 9.

ЗАДАНИЕ Д1 Исследование движения материальной точки

Тело ***M*** массой ***m***, получив в точке *A* начальную скорость V_A, двигается в изогнутой трубе *ABC*, которая находится в вертикальной плоскости (рис.Д1.1). На участке *AB* на тело кроме силы тяжести действует постоянная сила $\vec{P}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\vec{R}$, которая зависит от скорости тела ***V***, или от его положения ***AM*** = ***S***. Силами трения скольжения на участке *AB* пренебречь (таблица Д-1.2).

В точке *B* тело, не меняя модуля своей скорости, переходит на участок *BC* трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения скольжения и переменная сила $\vec{F}$. Коэффициент трения скольжения ***f*** и проекция переменной силы на ось ***X*** – F_X заданы в таблице Д-1.1.

Считая тело ***M*** материальной точкой и зная расстояние ***AB*** = ***ℓ*** или время **ф** движения тела от точки *A* до точки *B*, найти уравнение движения тела ***M*** на участке *BC*, то есть $x = x(t)$, где *x* = *BM*. Необходимые для расчета данные приведены в таблицах Д-1.1 и Д-1.2.

Таблица Д-1.1

вариант	***f***	F_x, **Н**
1	0,10	24t
2	0,15	2sin(2t)
3	0,20	$18t^2$
4	0,25	4cos(2t)
5	0,30	12t
6	0,10	8cos(4t)
7	0,15	$7{,}2t^2$
8	0,20	6sin(2t)
9	0,25	4,8t
0	0,30	2cos(2t)

Таблица Д-1.2

вариант	***m***, **кг**	V_A, **м/с**	***P***, **Н**	***R***, **Н**	***ℓ***, **м**	**τ, с**
1	4	15	8	0,8*V*	-	5
2	2	13	4	0,2*S*	5	-
3	1,5	12	9	0,6*V*	-	2,5
4	2,4	18	8	0,4*S*	3	-
5	2	10	12	0,5*V*	-	4
6	4	20	15	0,5*S*	4	-
7	1,2	14	10	0,4*V*	-	3
8	2,4	18	18	0,6*S*	2	-
9	0,8	16	6	0,2*V*	-	4
0	4	20	16	0,8*S*	2,5	-

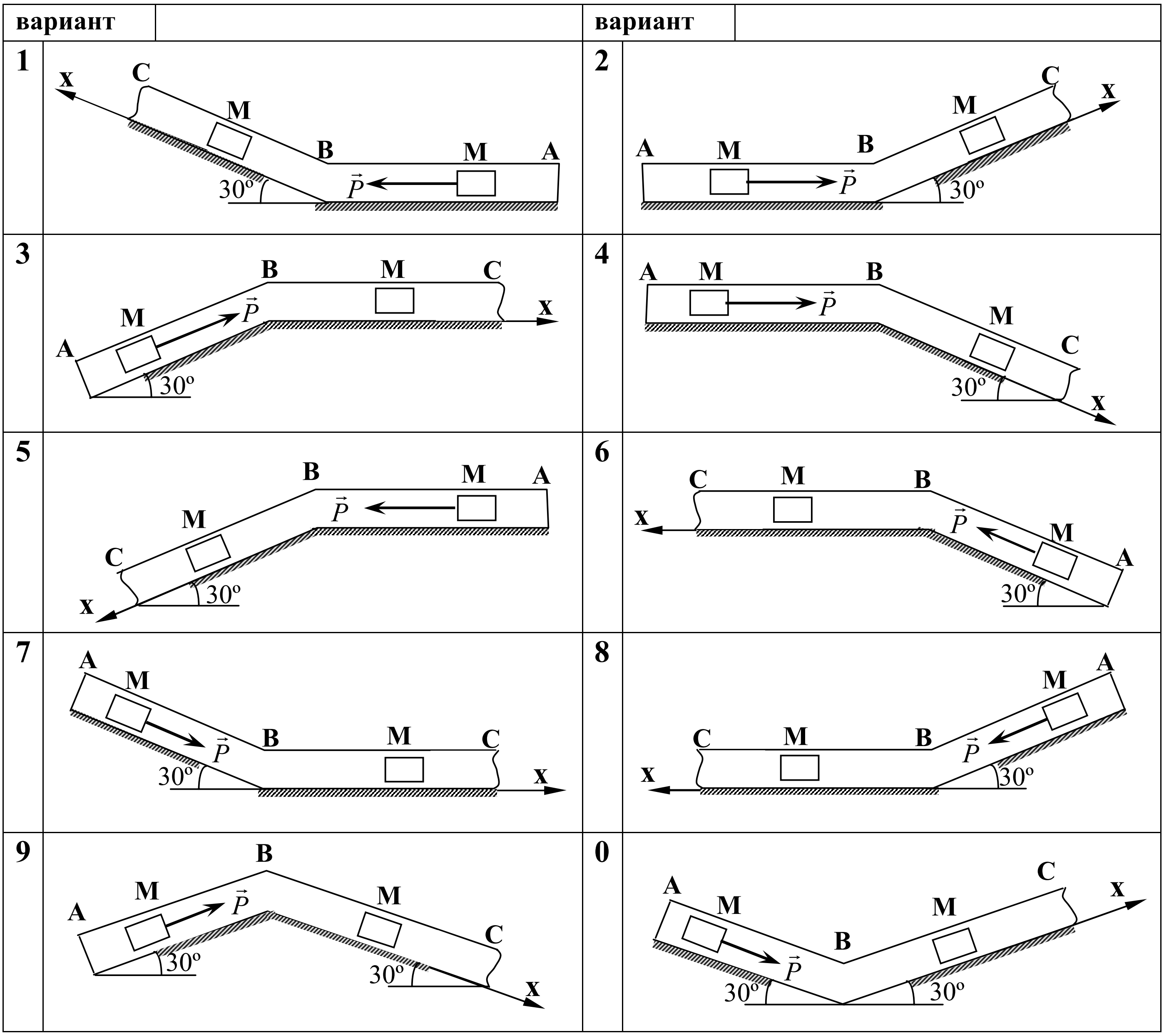

вариант
вариант
1
x C M B M A
$\vec{P}$
30°
2
A M B M C x
$\vec{P}$
30°
3
B M C
M A x
$\vec{P}$
30°
4
A M B
M C x
$\vec{P}$
30°
5
B M A
M C x
$\vec{P}$
30°
6
C M B
x M A
$\vec{P}$
30°
7
A M B M C x
$\vec{P}$
30°
8
M A C M B x
$\vec{P}$
30°
9
B M A M C x
$\vec{P}$
30° 30°
0
A M C x M B
$\vec{P}$
30° 30°

Рис. Д1.1

Пример выполнения задания Д1.

Условие задачи: Тело массой $\boldsymbol{m} = 2$ **кг**, получив в точке *A* начальную скорость $\boldsymbol{V_0} = 8$ **м/с**, движется в изогнутой трубке *ABC*, расположенной в вертикальной плоскости. На участке *AB* на тело кроме силы тяжести действует, как указано на рис. Д1.2, постоянная сила $\boldsymbol{Q} = 9{,}8$ **Н** и сила сопротивления $\boldsymbol{R} = 0{,}5\ V^2$ **Н**. Пройдя расстояние $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{l} = 3$ **м**, тело *D* в точке *B*, не изменяя значения своей скорости, переходит на участок *BC* трубы, где на него кроме силы тяжести действует переменная сила, проекция которой на ось *X* равна $\boldsymbol{F_x} = 8t + 4\cos 0{,}2t$ **(Н)** и сила трения скольжения. Коэффициент трения скольжения $\boldsymbol{f} = 0{,}1$. Найти закон движения тела *D* на участке *BC*. Принять $\boldsymbol{g} = 9{,}8$ **м/с²**.

Запишем условие задачи в кратком виде:

Дано: $m = 2$ кг; $V_0 = 8$ м/с; $Q = 9{,}8$ Н; $R = 0{,}5\ V^2$ Н; $AB = l = 3$ м; $F_x = 8t + 4\cos 0{,}2t$, Н; $f = 0{,}1$.

Определить: $x = x(t)$.

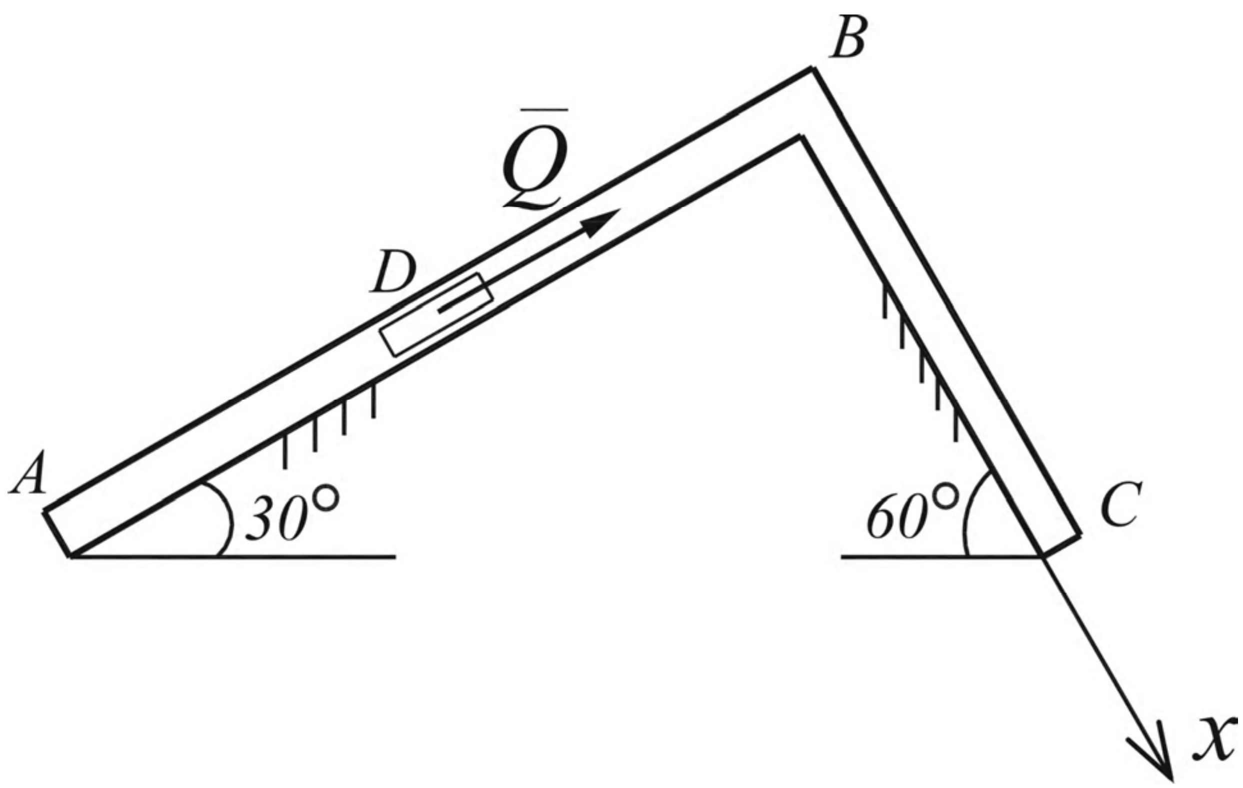


Рис. Д1.2

Решение.

1. Считая тело D материальной точкой, рассмотрим его движение на участке BC (ось X уже выбрана). На тело D действуют (рис. Д1.3): сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция стенки трубки $\vec{N}$, переменная сила, проекция которой на ось X равна F_x и сила трения $\vec{F}_{mp}$.

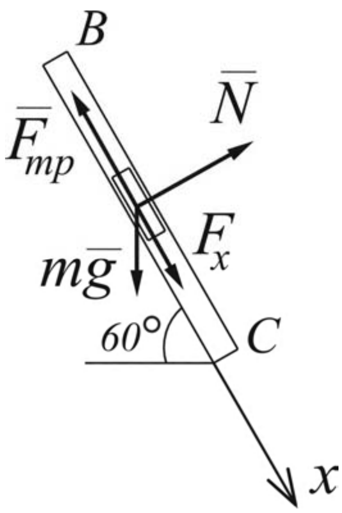


Рис. Д1.3

Сила трения по модулю равна:

$$F_{mp} = f \cdot N = f\,mg\cos 60^\circ = 0{,}1 \cdot 2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}98 \text{ Н}. \qquad (1)$$

В выражении (1) ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Составим дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось X:

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix} = F_x + mg\cos 30^\circ - F_{mp} = 8t + 4\cos 0{,}2t + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}87 - 0{,}98 =$$

$$= 8t + 4\cos 0{,}2t + 16{,}0 \text{ (Н)}.$$

или

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(8t + 4\cos 0{,}2t + 16{,}0) = \frac{1}{2}(8t + 4\cos 0{,}2t + 16{,}0) = 4t + 2\cos 0{,}2t + 8, \text{ м/с}^2. \qquad (2)$$

Для нахождения искомого закона движения материальной точки необходимо дважды проинтегрировать уравнение (2). Первый интеграл:

$$\dot{x} = 2t^2 + 10\sin 0{,}2t + 8t + C_1, \qquad (3)$$

Второй интеграл:

$$x = \frac{2}{3}t^3 - 50\cos 0{,}2t + 4t^2 + C_1 t + C_2. \qquad (4)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим из начальных на участке BC условий: при $t = 0$ начальное положение тела D равно $X_o = 0$, а начальная его скорость равна V_B. Следовательно, подставляя начальные условия в уравнения (3) и (4) получим:

$$C_1 = V_B, \text{ м/с} \quad \text{и} \quad C_2 = 50 \text{ м}.$$

Таким образом, искомое уравнение движения тела D на участке BC принимает вид:

$$x = \frac{2}{3}t^3 + 4t^2 - 50\cos 0{,}2t + V_B t + 50,\ \text{м}. \tag{5}$$

Неизвестной величиной в уравнении движения (5) является начальная на участке BC скорость тела D. По условию задачи «…тело D в точке B, не изменяя значения своей скорости, переходит на участок BC трубы…», следовательно, начальная скорость тела на участке BC V_B равна по модулю конечной скорости тела V_B на участке AB. Переходим, для нахождения скорости V_B, к рассмотрению движения тела D на участке AB.

2. Рассмотрим движение тела D, которое принимаем за материальную точку, на участке AB. Изображаем тело в произвольном положении на этом участке и прикладываем действующие на него силы: силу тяжести $m\vec{g}$,

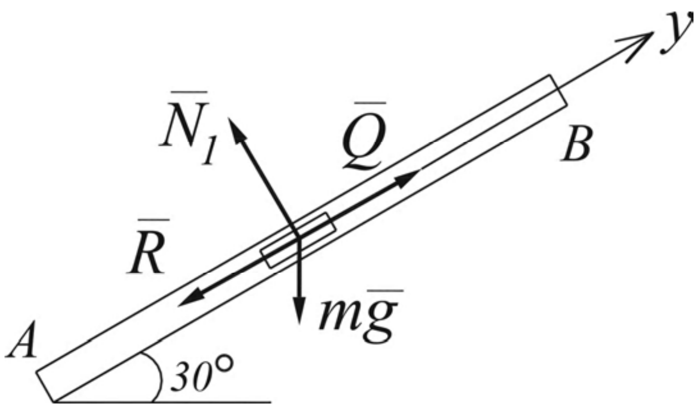


Рис. Д1.4

нормальную реакцию стенки трубки $\vec{N}_1$, силу $\vec{Q}$ и силу сопротивления $\vec{R}$. Здесь же показана и выбранная система координат – ось $У$. Ось одна, т.к. на участке AB, так же как и на участке BC, тело D движется прямолинейно.

Составим дифференциальное уравнение движения тела D на участке AB в проекции на ось $У$:

$$m\ddot{y} = \sum F_{iy} = Q - R - mg\cos 60^\circ. \tag{6}$$

Сократим обе части уравнения (6) на массу m и подставим цифровые параметры:

$$\ddot{y} = \frac{Q}{m} - \frac{R}{m} - g\cos 60^\circ = \frac{9{,}8}{2} - \frac{1}{2}0{,}5V^2 - 9{,}8 \cdot 0{,}5 = -0{,}25V^2. \qquad (7)$$

Так как

$$\ddot{y} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = V\frac{dV}{dy},$$

то полученное уравнение (7) принимает вид:

$$V\frac{dV}{dy} = -0{,}25V^2,$$

или

$$\frac{dV}{dy} = -0{,}25V. \qquad (8)$$

Полученное дифференциальное уравнение (8) является уравнением первого порядка с разделяющими переменными. Разделив переменные, имеем:

$$\frac{dV}{V} = -0{,}25dy,$$

откуда

$$\ln V = -0{,}25y + C_3. \qquad (9)$$

Постоянную интегрирования C_3 находим из начальных условий на участке AB: при $t = 0$ начальная координата тела D равна $y_0 = 0$ и начальная скорость $V_0 = V_A$. Следовательно:

$$\ln V_0 = -0{,}25 \cdot 0 + C_3$$

и

$$C_3 = \ln V_0. \qquad (10)$$

Подставив выражение (10) в уравнение (9) получим:

$$\ln V = -0{,}25 \cdot y + \ln V_0.$$

Откуда:

$$\ln V - \ln V_0 = -0{,}25\,y,$$

и

$$\ln\frac{V}{V_0} = -0{,}25y.$$

Следовательно,

$$\frac{V}{V_0} = e^{-0,25y},$$

а

$$V = V_0 \cdot e^{-0,25y} = 8 \cdot e^{-0,25y}, \text{ м/с.} \tag{11}$$

Формула (11) – это закон изменения скорости тела D на участке AB.

Подставляем в эту формулу значение длины участка $AB = l = y_к = 3$ м, найдем скорость тела D в точке B:

$$V_B = 8 \cdot e^{-0,25 \cdot 3} = 3,8 \text{ м/с.} \tag{12}$$

3. Определение уравнения движения тела D на участке BC.

Выяснив значение модуля скорости тела D в точке B, подставляем (12) в уравнение (5):

$$x = \frac{2}{3}t^3 + 4t^2 - 50\cos 0,2t + 3,8t + 50, \text{ м.}$$

Ответ: $x = \frac{2}{3}t^3 + 4t^2 - 50\cos 0,2t + 3,8t + 50,$ м.

ЗАДАНИЕ Д2 Применение общих теорем к изучению движения материальной точки

Шарик, принимаемый за материальную точку, двигается из положения ***A*** в середине трубки, ось которой находится в вертикальной плоскости (рис.Д2.1). Найти скорость шарика в положениях ***B, C, Д, E*** и силу давления шарика на стенку трубки в положении ***C***. Силами трения на криволинейных участках траектории пренебречь. Необходимые для расчетов данные приведены в таблицах Д-2.1 и Д-2.2, в которых:

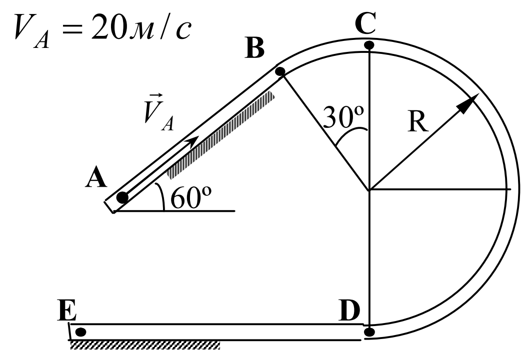
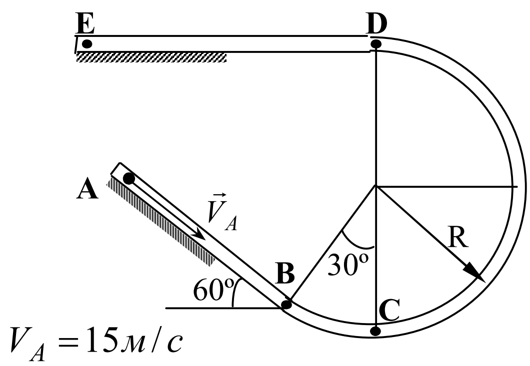
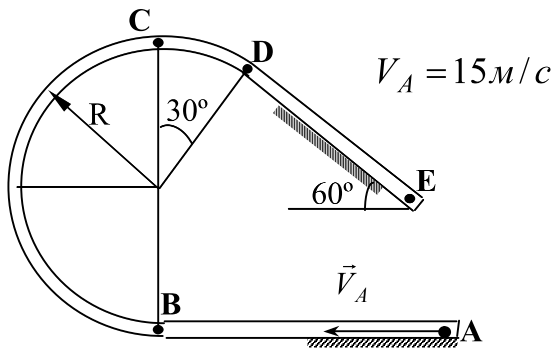
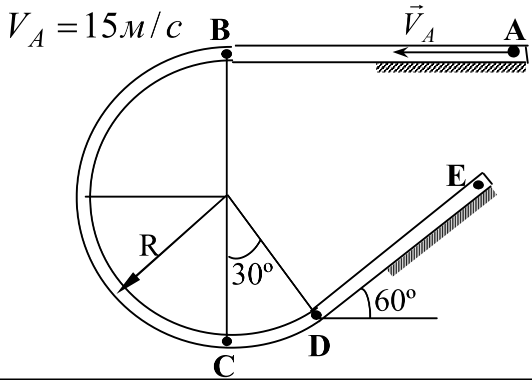
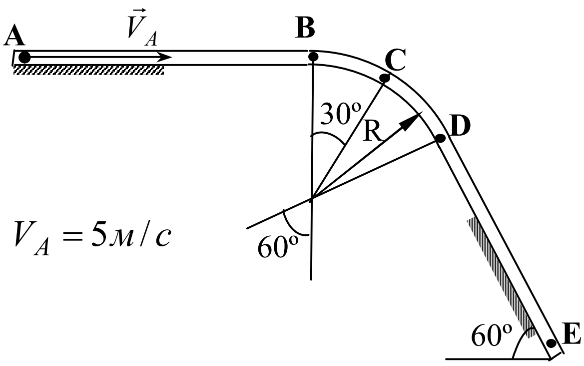
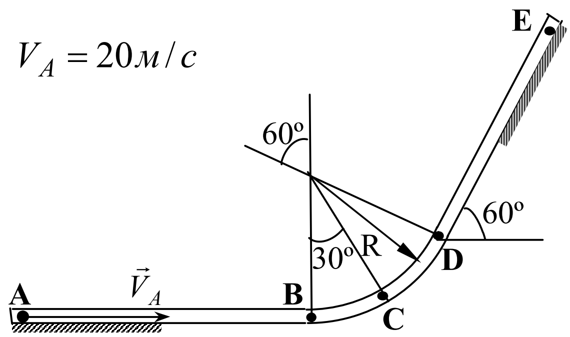
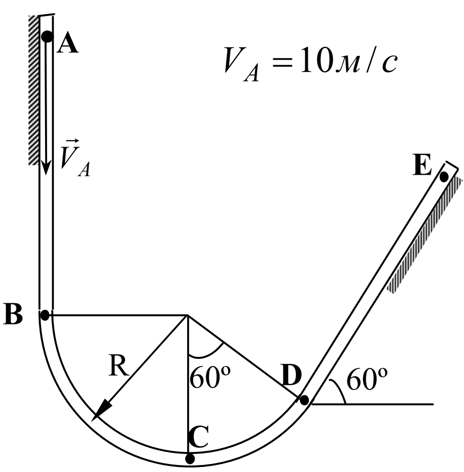
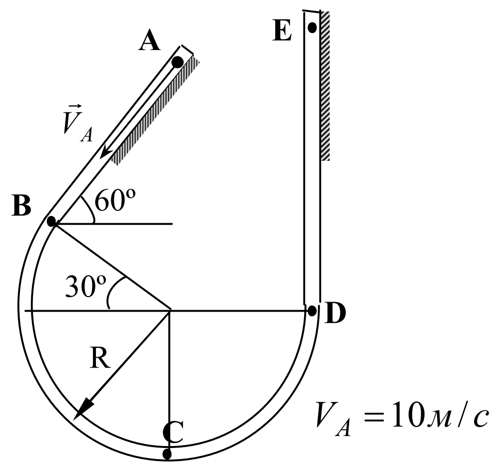
- m - масса шарика;
- V_A - скорость шарика в положении A;
- t_{AB} - время движения шарика на участке AB;
- AB - длина участка AB;
- f - коэффициент трения скольжения шарика на прямолинейных участках трубки;
- R - радиус кривизны трубки;
- t_{DE} - время движения шарика на участке DE;
- DE - длина участка DE.

Таблица Д-2.1

вариант	t_{DE}, *с*	***DE, м***
1	0,2	-
2	-	2,5
3	0,4	-
4	-	2,0
5	0,6	-
6	-	1,5
7	0,8	-
8	-	1,0
9	1,0	-
0	-	0,5

Таблица Д-2.2

вариант	***m, кг***	t_{AB}, *с*	***AB, м***	***f***	***R, м***
1	0,2	-	2,5	0,10	2,0
2	0,1	0,2	-	0,15	1,8
3	0,4	-	2,0	0,20	1,6
4	0,3	0,4	-	0,10	1,4
5	0,2	-	1,5	0,20	1,2
6	0,4	0,6	-	0,15	1,0
7	0,3	-	1,0	0,10	0,8
8	0,1	0,8	-	0,20	0,6
9	0,2	-	0,5	0,15	0,4
0	0,4	1,0	-	0,10	0,2

вариант		**вариант**	
1		**2**	
3		**4**	
5		**6**	
7		**8**	

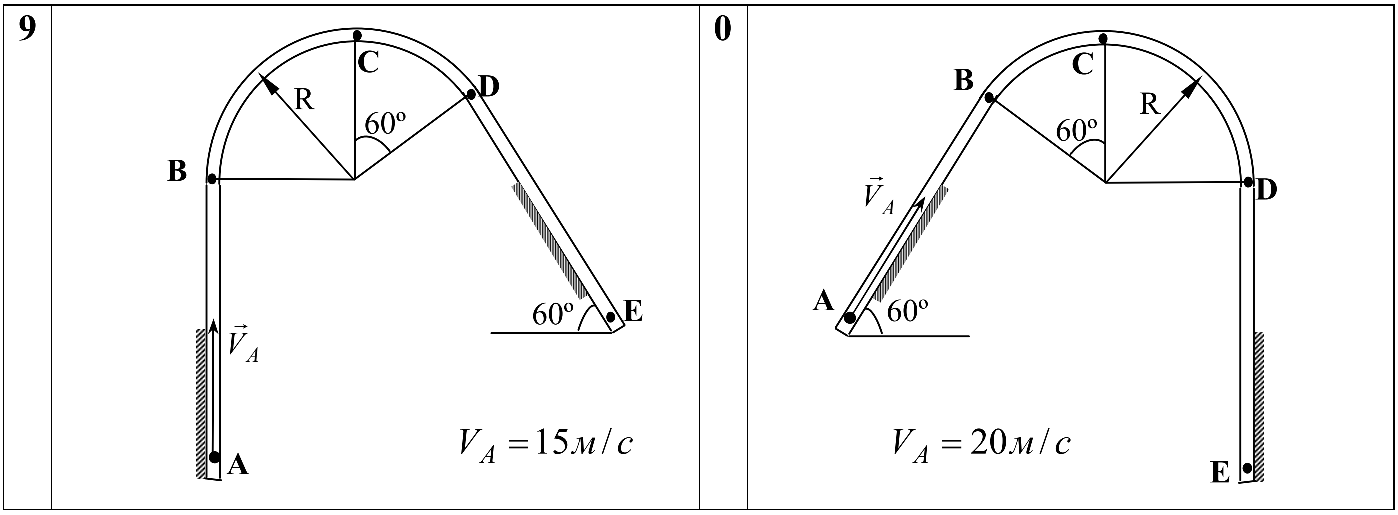


Рис. Д2.1

Пример выполнения задания Д2.

Условие задачи: решить задачу Д2 вариант 555.

Дано: $\boldsymbol{V_A}$ **= 25 м/с;** $\boldsymbol{DE}$ **= 0,6 м;** $\boldsymbol{m}$ **= 0,3 кг;** $\boldsymbol{t_{AB}}$ **= 1,2 с;** $\boldsymbol{f}$ **= 0,10;** $\boldsymbol{R}$ **= 0,3 м.**

Найти: $\boldsymbol{V_B}$ **,** $\boldsymbol{V_C}$ **,** $\boldsymbol{V_D}$ **,** $\boldsymbol{V_E}$ **,** $\boldsymbol{N_C}$ **.**

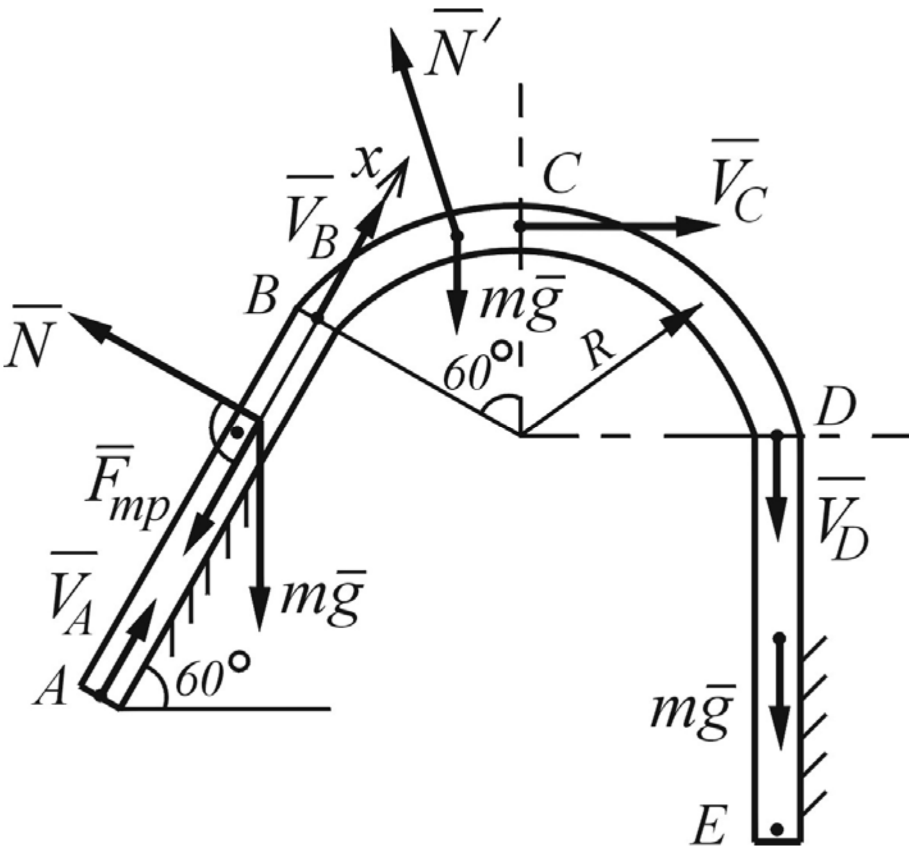


Рис. Д2.2

Решение.

1. Определение скорости шарика в т.B.

Рассматриваем шарик как материальную точку, движущуюся на участке AB. Показываем шарик на этом участке (рис. Д2.2) между начальным (в точке A) и конечным (в точке B) положениями. На шарик действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, сила трения $\vec{F}_{mp}$, направленная в сторону, противоположную скорости шарика и нормальная реакция стенки трубки $\vec{N}$. По условию задачи известно время t_{AB} движения шарика на участке AB, поэтому, для определения скорости шарика в т.B воспользуемся теоремой об изменении количества движения материальной точки в проекции на ось *X* (ось *X* выбираем таким образом, чтобы в любой точке на участке *AB* скорость шарика проектировалась на ось *X* в натуральную величину):

$$mV_B - mV_A = \sum S_x, \tag{1}$$

где: $\sum S_x$ - проекция геометрической суммы импульсов сил, действующих на шарик на участке *AB*, на ось *X*.

Действующие на шарик на участке *AB* силы постоянны, поэтому:

$$\sum S_x = -(mg\cos 30^\circ + F_{mp}) \cdot t_{AB}. \tag{2}$$

Сила трения:

$$F_{mp} = f \cdot N = f \cdot mg\sin 30^\circ. \tag{3}$$

В уравнении (2) учли, что нормальная реакция $\vec{N}$ перпендикулярна оси трубки и на ось *X* проектируется в ноль.

Уравнение (1) с учетом (2) и (3) примет вид:

$$mV_B - mV_A = -(mg\cos 30^\circ + fmg\sin 30^\circ)t_{AB}. \tag{4}$$

Из уравнения (4) находим скорость V_B:

$$V_B = V_A - (g\cos 30^\circ + fg\sin 30^\circ)t_{AB} =$$

$$= 25 - (9{,}8 \cdot 0{,}87 + 0{,}10 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5) \cdot 1{,}2 = 14{,}2 \text{ м/с}.$$

Вектор $\vec{V}_B$ показываем на рисунке.

2. Определение скорости шарика в т.*C*.

Рассмотрим движение шарика на участке *BC*. Покажем шарик между начальным положением (т.*B*) на этом участке и положением конечным (т.*C*). На шарик действуют силы: тяжести $m\vec{g}$ и нормальная реакция стенки трубки $\vec{N}'$. Время движения шарика на участке *BC* не дано, но известна разность вертикальных отметок между точками *B* и *C*, поэтому, для определения V_C воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = \sum A_i^e, \tag{5}$$

где: $\dfrac{mV_C^2}{2}$ - кинетическая энергия шарика в т.C;

$\dfrac{mV_B^2}{2}$ - кинетическая энергия шарика в т.B;

$\sum A_i^e$ - сумма работ всех сил, приложенных к шарику, на участке BC.

Определим работу сил, приложенных к шарику на участке BC:

а) работа сил тяжести:

$$A_{mg} = -mg(R - R\cos 60^\circ) = -mgR(1 - \cos 60^\circ); \tag{6}$$

б) работа нормальной реакции N':

$$A_{N'} = 0, \tag{7}$$

т.к. угол между направлениями $\vec{N'}$ и перемещением шарика все время равен 90°.

Уравнение (5) с учетом (6) и (7) принимает вид:

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = -mgR(1 - \cos 60^\circ). \tag{8}$$

Сокращая на массу, решаем уравнение (8) относительно искомой скорости V_C :

$$V_C = \sqrt{V_B^2 - 2gR(1 - \cos 60^\circ)} = \sqrt{(14{,}2)^2 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot (1 - 0{,}5)} = 14{,}1\,\text{м/с}.$$

Вектор $\vec{V_C}$ показываем на рисунке.

3. Определение скорость шарика в т.D.

На участке CD, так же, как и на участке BC, на шарик действуют сила тяжести и нормальная реакция стенки трубки, и так же, как и на участке BC, известна разность между вертикальными отметками точек C и D. Воспользуемся, для нахождения скорости V_D , теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{mV_D^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = \sum A_i^e. \tag{9}$$

Работа силы тяжести на участке CD:

$$A_{mg} = mgR.$$

Работа силы нормальной реакции:

$$A_{N'} = 0.$$

Уравнение (9) примет вид:

$$\frac{mV_D^2}{2} - \frac{mV_C^2}{2} = mgR.$$

Находим скорость шарика в т.D:

$$V_D = \sqrt{V_C^2 + 2gR} = \sqrt{(14{,}1)^2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}3} = 14{,}3 \text{ м/с}.$$

На рисунке показываем вектор $\vec{V}_D$.

4. Определение скорости шарика в т.E.

На участке DE шарик движется под действием только силы тяжести (нормальная реакция стенки трубки, а, следовательно, и сила трения равны нулю). Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии точки:

$$\frac{mV_E^2}{2} - \frac{mV_D^2}{2} = A_{mg} = mg \cdot DE.$$

Скорость шарика в точке E:

$$V_E = \sqrt{V_D^2 + 2g \cdot DE} = \sqrt{(14{,}3)^2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}6} = 14{,}7 \text{ м/с}.$$

5. Определим давление шарика на стенку трубки в точке C.

Покажем шарик находящимся в т.C и приложим действующие на него силы: тяжести $m\vec{g}$ и нормальную реакцию $\vec{N}_C$ (рис. Д2.3).

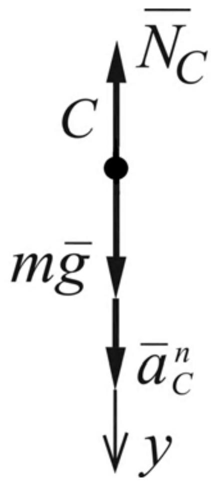


Рис. Д2.3

Составим дифференциальное уравнение движения шарика в проекции на ось y (на эту ось все силы проектируются в натуральную величину):

$$m\ddot{y} = \sum F_{iy} = mg - N_C. \tag{10}$$

В уравнении (10):

$$\ddot{y} = a_C^n = \frac{V_C^2}{R} = \frac{(14{,}1)^2}{0{,}3} = 662{,}7\,\text{м/с}^2.$$

Находим нормальную реакцию:

$$N_C = mg - m\ddot{y} = m(g - \ddot{y}) = 0{,}3(9{,}8 - 662{,}7) = -195{,}9\,\text{Н}.$$

Знак «минус» означает, что в действительности нормальная реакция стенки трубки направлена в сторону противоположную показанной на рис. Д2.3

Ответ: V_B = 14,2 м/с; V_C = 14,1 м/с; V_D = 14,3 м/с;

V_E = 14,7 м/с; N_C = -195,9 Н.

ЗАДАНИЕ Д3 Применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы для исследования ее движения

Механическая система под действием сил тяжести начинает двигаться из состояния покоя. Начальное положение системы показано на рисунке Д3.1.

Массы тел системы приведены в таблице Д-3.2.

Коэффициент трения скольжения тела 1 по плоскости: $f = 0{,}1$.

Радиусы большого круга тел 2 и 3: $R_2 = 0{,}30$ м; $R_3 = 0{,}20$ м. Зависимости между радиусами малого и большого кругов тел 2 и 3 указаны на рисунке Д3.1.

Радиусы инерции тел 2 и 3 относительно осей вращения: $i_2 = 0{,}20$ м, $i_3 = 0{,}16$ м.

Каток 4, который катится по плоскости без скольжения, считать однородным цилиндром радиусом $R_4 = 0{,}40$ м. Коэффициент трения качения катка 4: $\delta = 0{,}02$ м. Углы наклона плоскостей к горизонту заданы в таблице Д-3.1. Массами нитей, которые считаем нерастяжимыми, пренебречь.

Нити, к которым прикреплены тела 1 и 4, параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Определить:

1. Направление движения механической системы.
2. Значения искомых величин в тот момент времени, когда тело 1 пройдет расстояние $S = 0{,}5$ м. Искомые величины указаны в столбце «найти» таблицы Д-3.1, где обозначено:

V_1 и V_C - скорости тела 1 и центра масс тела 4;

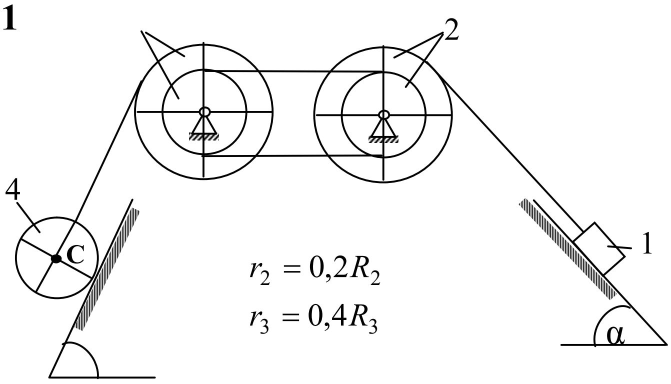
$\omega_2, \omega_3, \omega_4$ – угловые скорости тел 2,3 и 4.

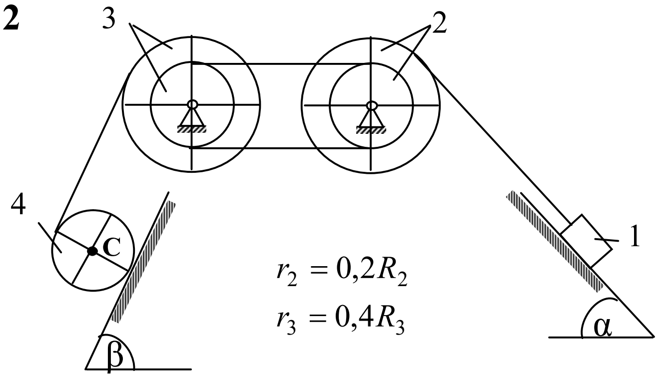
Таблица Д-3.1

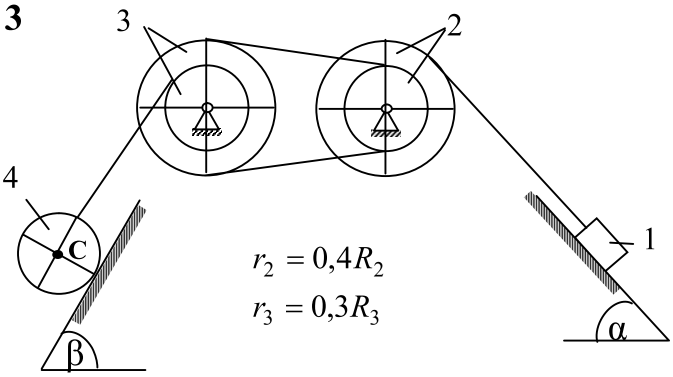
вариант	**α**	**β**	***найти***
1	30°	10°	V_1, V_C
2	35°	12°	V_1, ω_2
3	40°	15°	V_1, ω_3
4	45°	18°	V_1, V_C
5	50°	20°	V_1, ω_4
6	55°	22°	V_1, ω_2
7	60°	24°	V_1, V_C
8	65°	26°	V_1, ω_3
9	70°	28°	V_1, V_C
0	75°	30°	V_1, ω_4

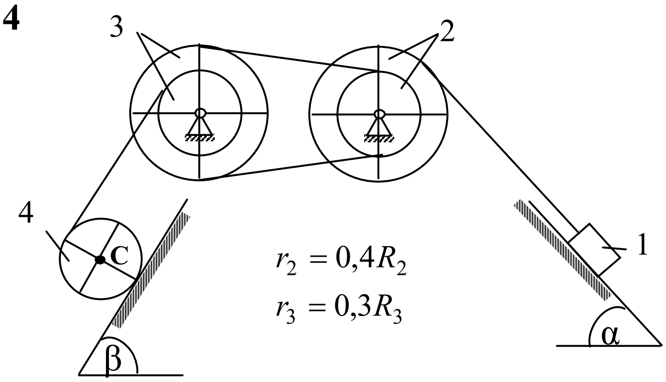
Таблица Д-3.2

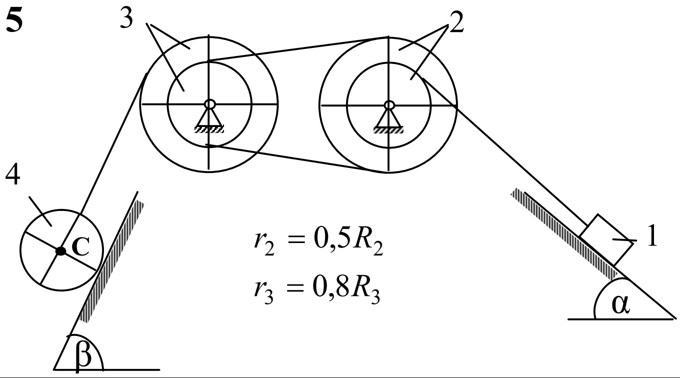
вариант	m_1, *кг*	m_2, *кг*	m_3, *кг*	m_4, *кг*
1	18	1	2	6
2	24	2	4	8
3	30	4	6	10
4	36	8	4	12
5	42	4	8	14
6	48	6	2	16
7	54	4	2	18
8	60	2	6	20
9	66	8	6	22
0	72	6	4	24

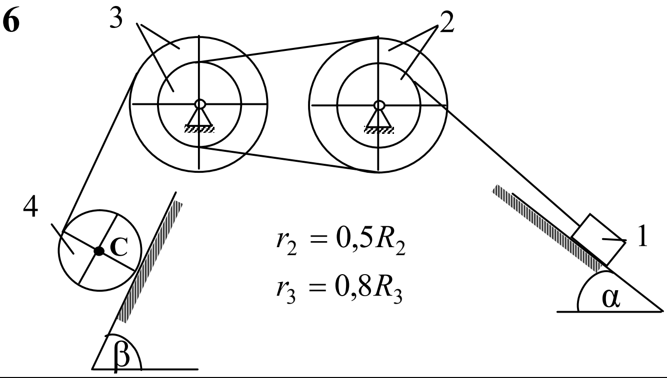
<table>
<tr><td>вариант</td><td></td><td>вариант</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>

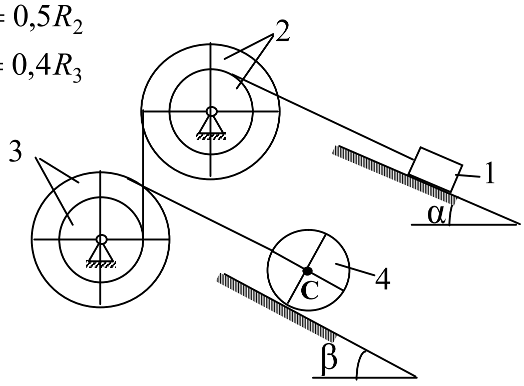
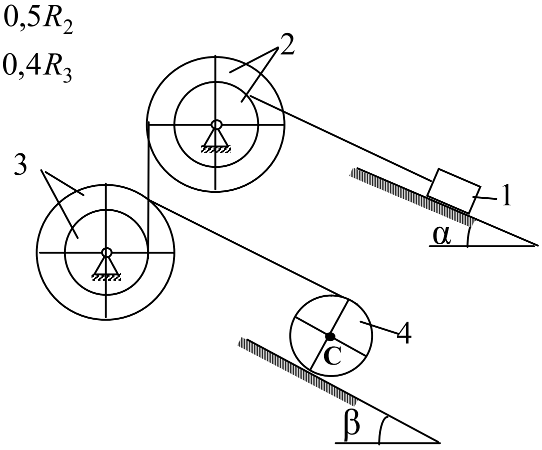
$r_2 = 0{,}2R_2$
$r_3 = 0{,}4R_3$</td><td>2</td><td>

$r_2 = 0{,}2R_2$
$r_3 = 0{,}4R_3$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>

$r_2 = 0{,}4R_2$
$r_3 = 0{,}3R_3$</td><td>4</td><td>

$r_2 = 0{,}4R_2$
$r_3 = 0{,}3R_3$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>

$r_2 = 0{,}5R_2$
$r_3 = 0{,}8R_3$</td><td>6</td><td>

$r_2 = 0{,}5R_2$
$r_3 = 0{,}8R_3$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$r_2 = 0{,}5R_2$
$r_3 = 0{,}4R_3$

</td><td>8</td><td>$r_2 = 0{,}5R_2$
$r_3 = 0{,}4R_3$

</td></tr>
</table>

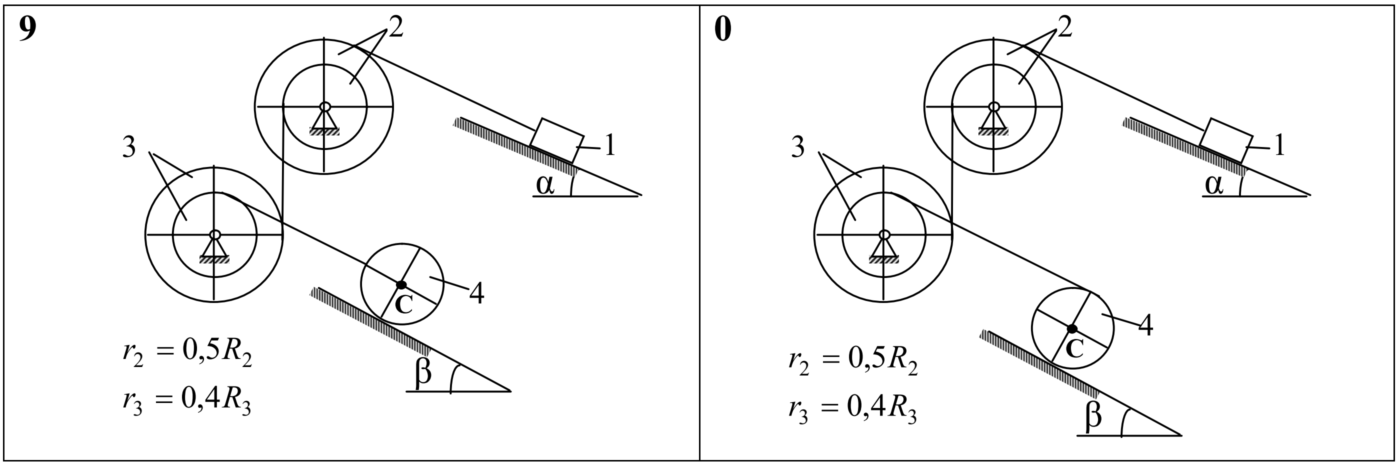


Рис. Д3.1

Пример выполнения задания Д3.

Условие задачи: решить 777 вариант задачи Д3. Запишем условие задачи в кратком виде (из таблиц Д-3.1 и Д-3.2):

Дано: **α = 60°; β = 30°; m_1 = 30 кг; m_2 = 8 кг; m_3 = 6 кг; m_4 = 22 кг; V_0 = 0; f = 0,1; R_2 = 0,30 м; R_3 = 0,20 м; i_2 = 0,20 м; i_3 = 0,16 м; R_4 = 0,40 м; δ = 0,02 м; S = 0,5 м; r_2 = 0,5 R_2; r_3 = 0,4 R_3.**

Найти: **V_1 ;V_C .**

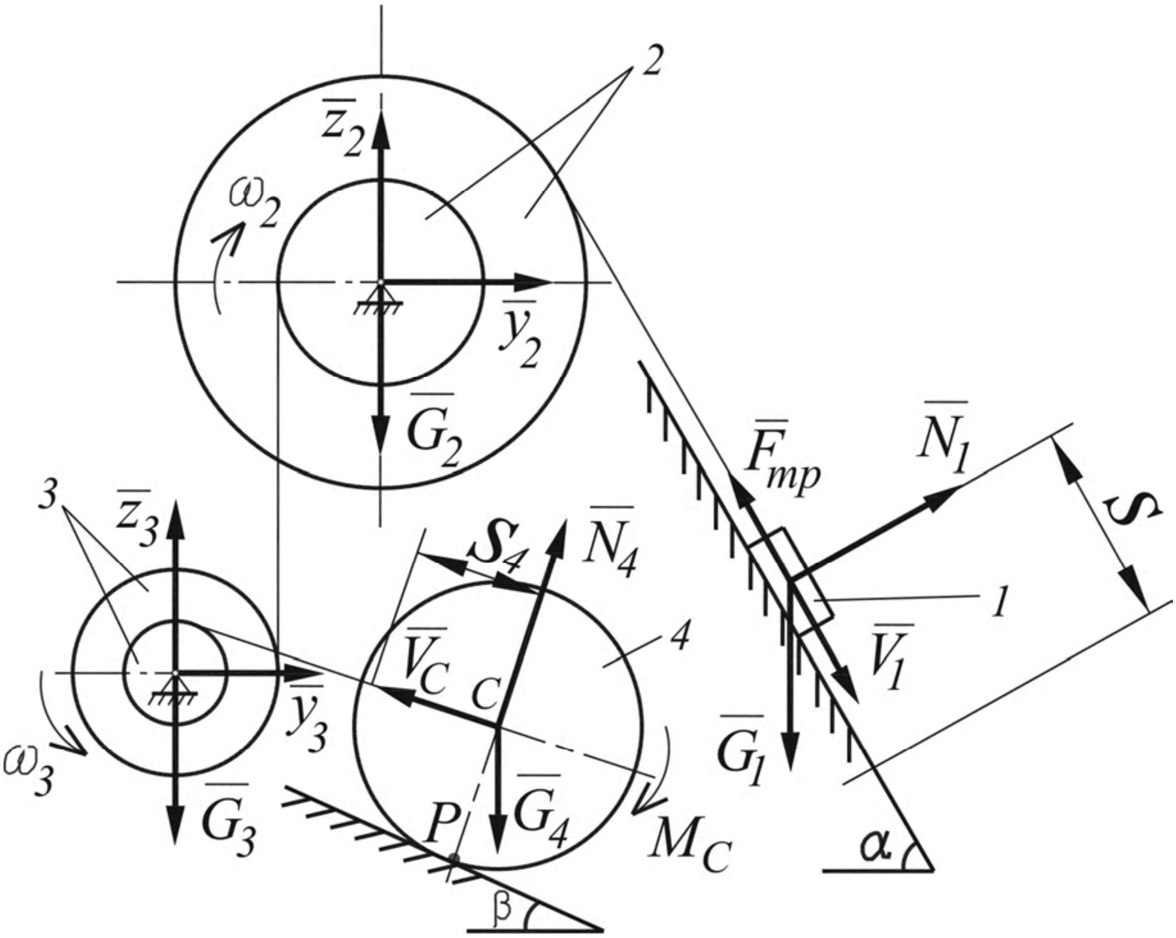


Рис. Д3.2

Решение.

1. Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_o = \sum A_i^e + \sum A_i^i, \qquad (1)$$

где: T - кинетическая энергия механической системы в конечный момент времени, т.е. кинетическая энергия системы в момент, когда пройденный грузом 1 путь равен S;

T_o - кинетическая энергия механической системы в начальный момент времени;

$\sum A_i^e$ *и* $\sum A_i^i$ - сумма работ всех внешних и внутренних сил, приложенных к точкам механической системы, соответственно.

Рассматриваем предложенную механическую систему состоящую из абсолютно твердых тел связанных между собой недеформируемыми (нерастяжимыми) нитями. В этом случае сумма работ всех внутренних сил

$$\sum A_i^i = 0.$$

По условию задачи механическая система в начальный момент времени находилась в состоянии покоя, следовательно:

$$T_o = 0.$$

Уравнение (1) принимает вид:

$$T = \sum A_i^e. \tag{2}$$

2. Определение кинетической энергии механической системы.

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех тел, образующих систему, т.е.:

$$T = \sum T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \tag{3}$$

Кинетическая энергия твердого тела зависит от вида движения данного тела.

Предположим, груз 1 механической системы опускается по наклонной плоскости. В момент, когда пройденный им путь станет равным S, его скорость будет V_1. Груз 1, как следует из рис. Д3.2, совершает поступательное движение и его кинетическая энергия равна:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2. \tag{4}$$

Ступенчатый шкив 2 совершает вращательное движение с угловой скоростью ω_2. Его кинетическая энергия равна:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_2^2,$$

где I_2 - момент инерции ступенчатого шкива относительно оси вращения.

Момент инерции ступенчатого шкива:

$$I_2 = m_2 \cdot i_2^2.$$

Следовательно,

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot i_2^2 \cdot \omega_2^2. \qquad (5)$$

Ступенчатый шкив 3, так же как и тело 2, совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω_3 . Его кинетическая энергия равна:

$$T_3 = \frac{1}{2} I_3 \cdot \omega_3^2 = \frac{1}{2} m_3 \cdot i_3^2 \cdot \omega_3^2. \qquad (6)$$

Каток 4 совершает плоское движение. Его центр масс т.C движется со скоростью V_C . Пренебрегая проскальзыванием катка будем считать точку касания катка с наклонной плоскостью (т.P) мгновенным центром скоростей, вокруг которого в данный момент времени вращается каток с угловой скоростью

$$\omega_4 = \frac{V_C}{R_4}.$$

Кинетическая энергия катка:

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 \cdot V_C^2 + \frac{1}{2} I_4 \cdot \omega_4^2,$$

где I_4 - момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс катка.

Полагая каток однородным цилиндром, найдем значение указанного момента инерции:

$$I_4 = \frac{1}{2} m_4 \cdot R_4^2.$$

Таким образом

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 \cdot V_C^2 + \frac{1}{2} m_4 \cdot R_4^2 \cdot (\frac{V_C}{R_4})^2 = m_4 \cdot V_C^2. \qquad (7)$$

Подставим выражения (4), (5), (6) и (7) в уравнение (3):

$$T = \frac{1}{2} m_1 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot i_2^2 \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot i_3^2 \cdot \omega_3^2 + m_4 \cdot V_C^2. \qquad (8)$$

Установим зависимости между линейными и угловыми скоростями, выразив эти параметры через скорость груза 1 V_1.

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2};\ \omega_3 = \frac{r_2}{R_2 \cdot R_3} V_1;\ V_C = \frac{r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3} V_1;\ \omega_4 = \frac{r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3 \cdot R_4} V_1. \qquad (9)$$

Подставим выражения (9) в уравнение (8) и упростим:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot i_2^2 \cdot (\frac{V_1}{R_2})^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot i_3^2 \cdot (\frac{r_2 \cdot V_1}{R_2 \cdot R_3})^2 + m_4 \cdot (\frac{r_2 \cdot r_3 \cdot V_1}{R_2 \cdot R_3 \cdot R_4})^2 =$$

$$= \frac{1}{2} 30 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} 8 \cdot (0{,}20)^2 \cdot \frac{V_1^2}{(0{,}30)^2} + \frac{1}{2} 6 \cdot (0{,}16)^2 \cdot [\frac{(0{,}5 \cdot 0{,}30)^2}{(0{,}30)^2 \cdot (0{,}20)^2}] \cdot V_1^2 +$$

$$+ 22 \cdot [\frac{(0{,}5 \cdot 0{,}30)^2 \cdot (0{,}4 \cdot 0{,}20)^2}{(0{,}30)^2 \cdot (0{,}20)^2 \cdot (0{,}40)^2}] \cdot V_1^2 = 22{,}8 V_1^2. \qquad (10)$$

3. Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к точкам механической системы, за время, когда груз 1 пройдет путь *S*. Покажем на рис. Д3.2 все внешние силы: силу тяжести груза 1 $\vec{G_1}$, нормальную реакцию $\vec{N_1}$, силу трения $\vec{F_{mp}}$, силу тяжести блока 2 $\vec{G_2}$ и реакции подшипников $\vec{Y_2}$ и $\vec{Z_2}$, силу тяжести блока 3 $\vec{G_3}$ и реакции подшипников $\vec{Y_3}$ и $\vec{Z_3}$, силу тяжести катка 4 $\vec{G_4}$, нормальную реакцию $\vec{N_4}$ и момент сопротивления вследствие трения качения катка об опорную поверхность M_C.

Помним, что работа силы равна нулю, если:

1) сила перпендикулярна перемещению тела;

2) сила приложена к неподвижной точке.

Учитывая это, видим, что работа сил $\vec{N_1}$, $\vec{G_2}$, $\vec{Y_2}$, $\vec{Z_2}$, $\vec{G_3}$, $\vec{Y_3}$, $\vec{Z_3}$ и $\vec{N_4}$ равна нулю.

Таким образом, работу совершают силы $\vec{G_1}$, $\vec{F_{mp}}$, $\vec{G_4}$ и момент M_C. Вычислим работу этих сил и момента:

а) работа силы тяжести $\vec{G}_1$:

$$A(G_1) = G_1 \cdot h_1 = m_1 \cdot g \cdot S \cdot \sin\alpha;$$

б) работа силы трения $\vec{F}_{тр}$:

$$A(F_{тр}) = -F_{тр} \cdot S = -f \cdot N_1 \cdot S = -- f \cdot m_1 \cdot g \cdot S \cdot \cos\alpha;$$

в) работа силы тяжести $\vec{G}_4$:

$$A(G_4) = -G_4 \cdot h_4 = -m_4 \cdot g \cdot h_4 = -m_4 \cdot g \cdot S_4 \cdot \sin\beta;$$

г) работа момента M_C:

$$A(M_C) = -M_C \cdot \varphi = -\delta \cdot N_4 \cdot \frac{S_4}{R_4} = -\delta \cdot m_4 \cdot g \cdot \frac{S_4}{R_4} \cos\beta.$$

Соотношение между перемещениями S и S_4 найдем из тех соображений, что за одно и то же время t:

$$t = \frac{V_1}{S} = \frac{V_C}{S_4},$$

Или

$$S_4 = \frac{V_C}{V_1} S = \frac{r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3} S = \frac{0{,}5R_2 \cdot 0{,}4R_3}{R_2 \cdot R_3} S = 0{,}2S.$$

Таким образом:

$$\sum A_i^e = A(G_1) + A(F_{тр}) + A(G_4) + A(M_C) = m_1 \cdot g \cdot S \cdot \sin\alpha - f \cdot m_1 \cdot g \cdot S \cdot \cos\alpha -$$

$$- m_4 \cdot g \cdot 0{,}2S \cdot \sin\beta - \delta \cdot m_4 \cdot g \frac{0{,}2S}{R_4} \cos\beta = 30 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}87 - 0{,}1 \cdot 30 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 -$$

$$- 22 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 - 0{,}02 \cdot 22 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}40} \cdot 0{,}87 = 109\,\text{Н·м} = 109\ \text{Дж} \qquad (10)$$

4. Приравниваем выражение (10) и (11) и находим искомую скорость V_1:

$$22{,}8 \cdot V_1^2 = 109\,\text{Дж},$$

и

$$V_1 = \sqrt{\frac{109}{22{,}8}} = 2{,}19\ \text{м/с}.$$

Скорость груза V_1 положительна. Это означает, что наше предположение, будто груз 1 опускается, оказалось правильным.

5. Находим скорость V_C:

$$V_C = \frac{r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3} V_1 = \frac{0,5R_2 \cdot 0,4R_3}{R_2 \cdot R_3} V_1 = 0,2V_1 = 0,2 \cdot 2,19 = 0,438 \text{ м/с.}$$

Ответ: V_1 = 2,19 м/с; V_C = 0,438 м/с.

Динамика материальной точки и механической системы. Контрольные задания и методические указания

Составители: В.Ф. Мущанов, д.т.н., профессор,
Ф.Ф. Стифеев, к.т.н., доцент,
С.А. Фоменко, ассистент