МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА.

Задания и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ

г. МАКЕЕВКА – 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ

Кафедра «Теоретической и прикладной механики»

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА.

Задания и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ

Утверждено
на учебно-методическом совете
Протокол №
от

Рассмотрено и утверждено
на заседании кафедры
«Теоретической и прикладной механики»
Протокол № от

г. Макеевка-2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Если к каждой материальной точке движущейся механической системы приложить силу инерции этой точки, то все эти силы инерции будут уравновешены заданными (внешними) силами и реакциями связей, приложенными к данной системе. В этом и состоит сущность принципа Даламбера для механической системы.

Таким образом, если заданную силу, приложенную к i - той точке механической системы, состоящей из n материальных точек, обозначим $\vec{F_i}$, реакцию связей, приложенной к той же точке, обозначим $\vec{N_i}$ и силу инерции этой точки $\vec{\Phi_i}$, то будем иметь:

$$\vec{F_i} + \vec{N_i} + \vec{\Phi_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

При этом

$$\vec{\Phi_i} = -m_i \cdot a_i,$$

т.е. сила инерции материальной точки равна по модулю производной массы этой точки на ее ускорение и направлена противоположно этому ускорению.

Отсюда следует, что система заданных (внешних) сил, реакций связей и сил инерции удовлетворяет уравнениям статики, т.е. сумма проекций всех этих сил на любую ось и сумма их моментов относительно любой точки или любой оси равны нулю.

Принцип Даламбера дает общий прием составления уравнений, необходимых для решения задач динамики системы, причем эти уравнения имеют ту же форму, как и уравнения статики. Этот прием оказывается особенно полезным при решении тех задач, в которых требуется найти динамические реакции связей, т.е. реакции, возникающие при движении системы.

Применяя принцип Даламбера, следует иметь в виду, что он как и основной закон динамики, относится к движению, рассматриваемому по отношению к инерциальной системе отсчета. При этом на точки механической системы, движение которой изучается, действуют только внешние (заданные) силы $\vec{F_i}$ и реакции связей $\vec{N_i}$, возникающие в результате взаимодействия точек системы с телами, не входящими в систему. Под действием этих сил точки системы i движутся с соответствующими ускорениями $\vec{a_i}$. Силы же инерции, о которых говорится в принципе Даламбера, на движущиеся точки не действует. Введение сил инерции – это прием, позволяющий составлять уравнения динамики с помощью более простых методов статики.

На основании принципа Даламбера должно быть:

$$\begin{cases} \sum \vec{F_i} + \sum \vec{N_i} + \sum \vec{\Phi_i} = 0; \\ \sum M_o(\vec{F_i}) + \sum M_o(\vec{N_i}) + \sum M_o(\vec{\Phi_i}) = 0. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$\vec{\Phi} = \sum \vec{\Phi_i} \quad \text{и} \quad M_o^u = \sum M_o(\vec{\Phi_i}).$$

Величины $\vec{\Phi}$ и M_o^u представляют собой главный вектор и главный момент относительно центра O системы сил инерции.

Главный вектор сил инерции тела, совершающего любое движение, равен произведению массы тела на ускорение его центра масс и направлен противоположно этому ускорению:

$$\vec{\Phi} = -m \cdot \vec{a_c},$$

где: m – масса тела;

a_c – ускорение центра масс.

Если ускорение $\vec{a_c}$ разложить на нормальное и касательное, то вектор $\vec{\Phi}$ разложится на составляющие:

$$\vec{\Phi_n} = -m \cdot \vec{a_c^n} \quad \text{и} \quad \vec{\Phi_\tau} = -m \cdot \vec{a_c^\tau}.$$

Главный момент сил инерции зависит от вида движения твердого тела.

1. Поступательное движение.

При поступательном движении главный момент сил инерции относительно центра масс $M_c^u = 0$ и все силы инерции приводятся только к главному вектору $\vec{\Phi}$, проходящему через центр масс тела.

2. Плоскопараллельное движение.

При плоскопараллельном (или плоском) движении твердого тела система сил инерции приводится к главному вектору, равному $\vec{\Phi} = -m \cdot \vec{a}_c$ и приложенному к центру масс C тела, и к лежащей в плоскости симметрии тела паре, момент которой:

$$M_c^u = -I_c \cdot \varepsilon,$$

где: I_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела;

ε – угловое ускорение тела.

Знак «минус» в этой формуле показывает, что направление M_c^u противоположно направлению углового ускорения тела.

3. Вращение вокруг оси, не проходящей через центр масс тела.

В этом случае, так же, как и при плоском движении тела все силы инерции приводятся к главному вектору и к главному моменту сил инерции.

4. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела.

При этом движении ускорение центра масс $\vec{a}_c = 0$, а, следовательно, и главный вектор $\vec{\Phi} = 0$.

В рассматриваемом случае система сил инерции приводится к одной паре, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения тела, и имеющей момент

$$M_z^u = -I_z \cdot \varepsilon,$$

где: I_z – момент инерции тела относительно оси вращения z.

2. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Задачи, относящиеся к данному разделу, можно разделить на два основных типа:

I. Задачи, в которых силы, приложенные к каждому телу системы (внешние, реакции связей и силы инерции) лежат в одной плоскости.

II. Задачи, в которых внешние силы, силы реакции связей и силы инерции образуют произвольную пространственную систему сил.

2.1. Задачи I типа.

Поскольку в задачах этого типа рассматривается механическая система, находящаяся в равновесии под действием плоской произвольной системы сил, то составляем три уравнения равновесия: два уравнения проекций сил на координатные оси и одно уравнение моментов всех сил относительно выбранной точки.

Обычно искомыми величинами в этих задачах являются ускорения тел и реакции связей.

Последовательность решения задач:

а) выполняем рисунок (расчетную схему) строго в соответствии с условием задачи;

б) выбираем систему координат;

в) на расчетной схеме показываем внешние (заданные) нагрузки, реакции связей и силы инерции, причем, определяя главный вектор и главный момент сил инерции руководствуемся видом движения твердого тела и, при плоском или вращательном движениях, положением центра масс тела;

г) составляем уравнение равновесия; при этом учитываем, что неизвестных величин должно быть не более числа уравнений равновесия;

д) при составлении уравнений проекций сил на координатные оси пользуемся правилами нахождения проекции вектора на ось;

е) при составлении уравнения моментов целесообразно за рассматриваемую точку, относительно которой берутся моменты, выбрать точку, через которую проходит линия действия двух искомых реакций;

ж) если в задаче рассматривается составная конструкция, состоящая из двух или более тел, то приходится, расчленив эту систему, составлять уравнения равновесия для каждого тела в отдельности;

з) рассматривая вращательное движение тела вокруг неподвижной оси, следует учитывать, что ускорение каждой точки этого тела равно геометрической сумме ускорений нормального и касательного. Если тело вращается равномерно, то касательные ускорения, а, следовательно, и касательные силы инерции всех его материальных точек равны нулю.

2.2. Задачи II типа.

К этой группе относятся задачи, в которых требуется определить реакции двух закрепленных точек твердого тела (двух подшипников или подшипника и подпятника), возникающие при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через эти точки.

В отличие от задач I типа, здесь, после приложения всех внешних нагрузок, реакций связей и всех сил инерции, можем рассматривать равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При этом, в общем случае, можем составить шесть известных из «пространственной» статики уравнений равновесия: три уравнения проекций сил и три уравнения моментов сил относительно координатных осей. С учетом этого обстоятельства в остальном порядок решения задач II типа аналогичен последовательности решения задач I типа.

При решении задач этой группы по принципу Даламбера следует иметь в виду, что в уравнение моментов всех сил относительно оси вращения искомые реакции подшипников не войдут, так как их моменты относительно этой оси равны нулю. Поэтому эти реакции определяются из остальных пяти уравнений равновесия. Если в задаче, как это нередко бывает, требуется найти только реакции, перпендикулярные к оси вращения, то достаточно составить четыре уравнения равновесия (два уравнения проекций на оси, перпендикулярные оси вращения и два уравнения моментов относительно этих же осей).

ЗАДАНИЕ Д5. Применение принципа Даламбера для определения динамических реакций подшипников

К горизонтальному валу, закрепленному в подшипниках A и B (рис. Д5.1), жестко прикреплены стальные сплошной цилиндр диаметром D_1 и шириной h_1 и шкив, масса которого равномерно распределена по его ободу (массами спиц шкива, массой вала, а, также, всеми силами сопротивления пренебречь). Внутренний диаметр шкива d_2, наружный – D_2, ширина – h_2. Центры тяжести цилиндра и шкива смещены от оси вала на расстояния O_1C_1 и O_2C_2 соответственно (где C_1 – центр масс цилиндра, а C_2 – центр масс шкива).

Положения точек C_1 и C_2 определяются радиусами-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ соответственно (рис. Д5.2).

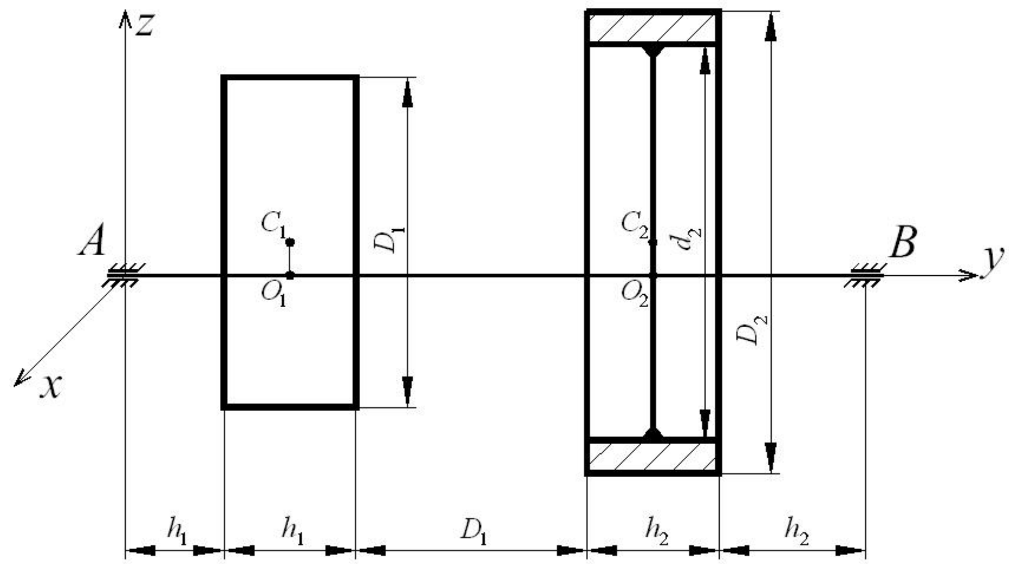
Вал вращается с постоянной угловой скоростью, соответствующей «n» об/мин.

Определить момент инерции системы относительно оси вращения и динамические реакции подшипников A и B в момент времени, когда радиус-вектор $\vec{r}_1$ направлен вертикально вверх, а радиус-вектор $\vec{r}_2$ отклонен от него на угол α по направлению движения часовой стрелки.

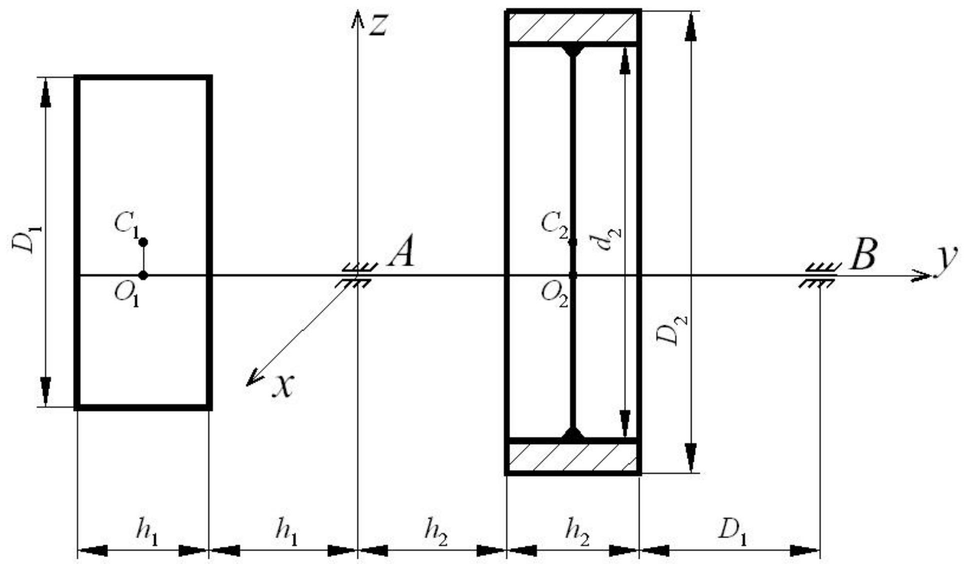
Указания: 1. Номер схемы на рис. Д5.1 выбирать в соответствии с последней цифрой шифра.

2. Данные из таблицы Д5-1 выбирать согласно предпоследней цифре шифра.

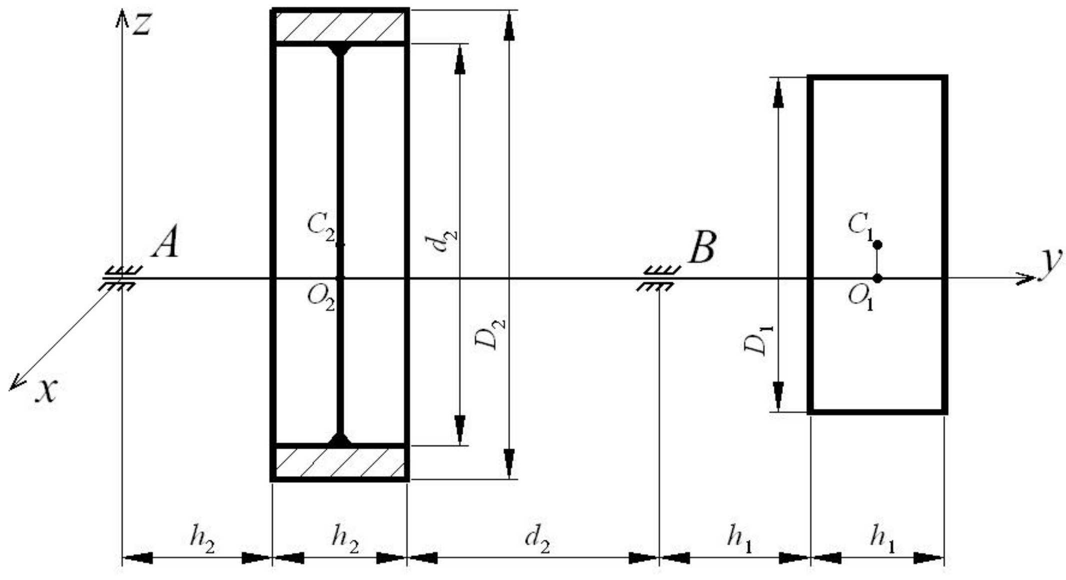
0


z
A
B
y
x
C1
O1
D1
C2
O2
d2
D2
h1
h1
D1
h2
h2

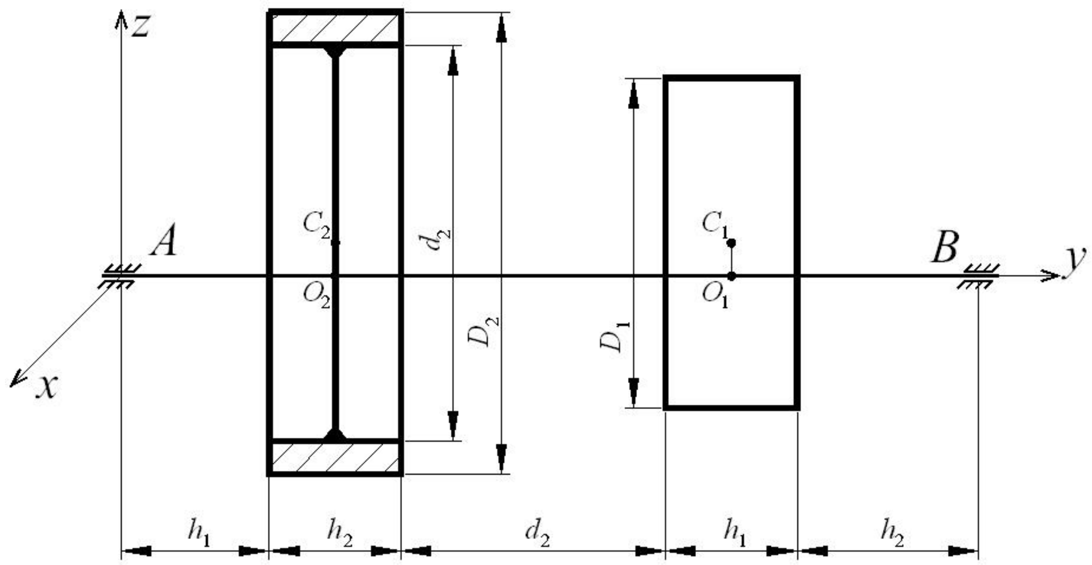
1


z
D1
C1
O1
A
x
C2
O2
d2
D2
B
y
h1
h1
h2
h2
D1

2

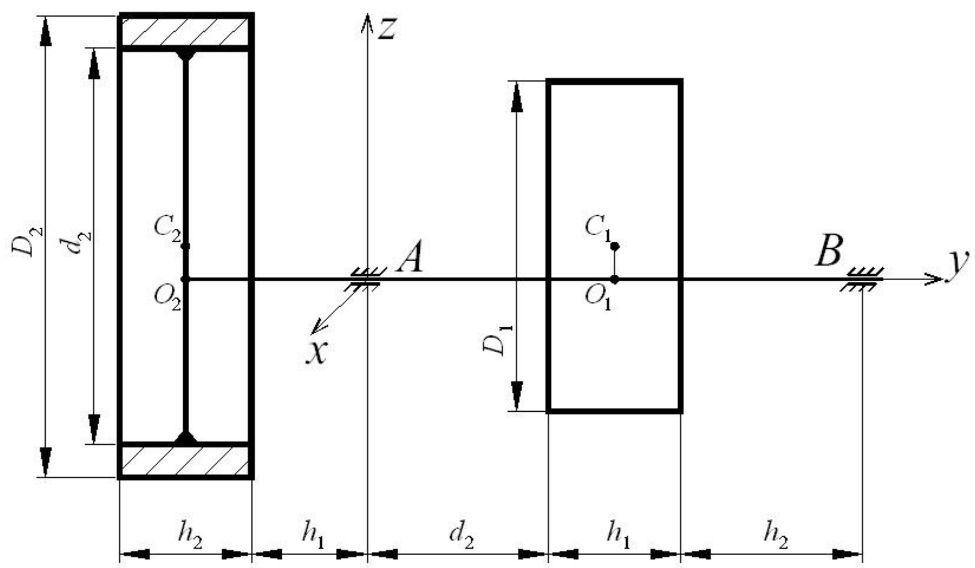

z
C2
O2
d2
D2
A
B
x
C1
O1
D1
y
h2
h2
d2
h1
h1

3



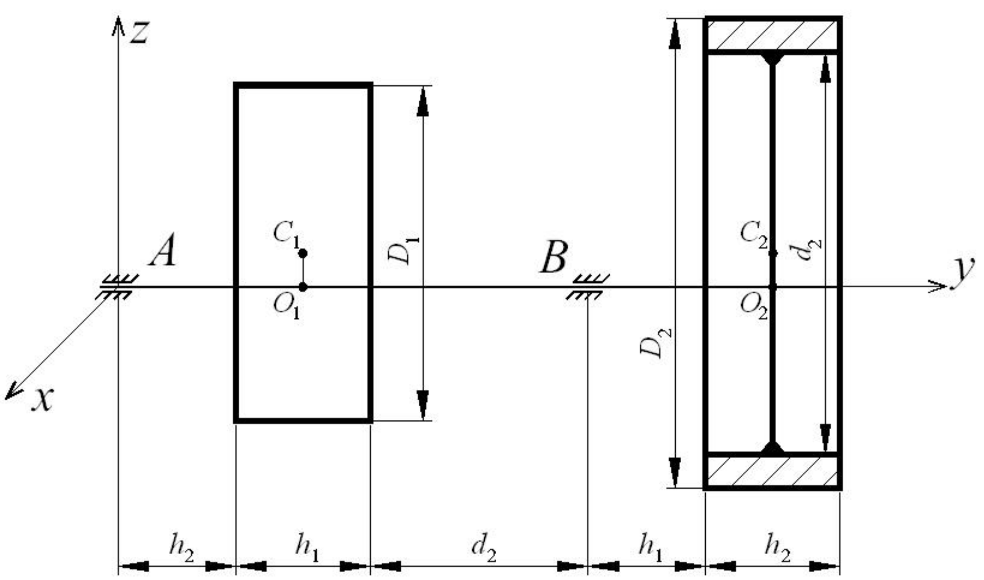
z
A
C2
O2
d2
D2
C1
O1
D1
B
y
x
h1
h2
d2
h1
h2

4



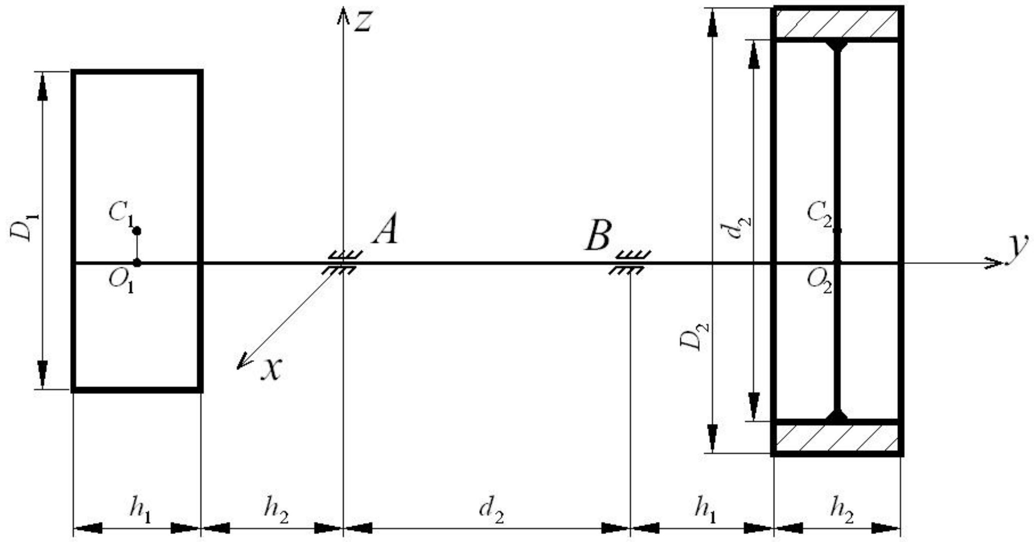
D2
d2
C2
O2
z
A
x
C1
O1
D1
B
y
h2
h1
d2
h1
h2

5

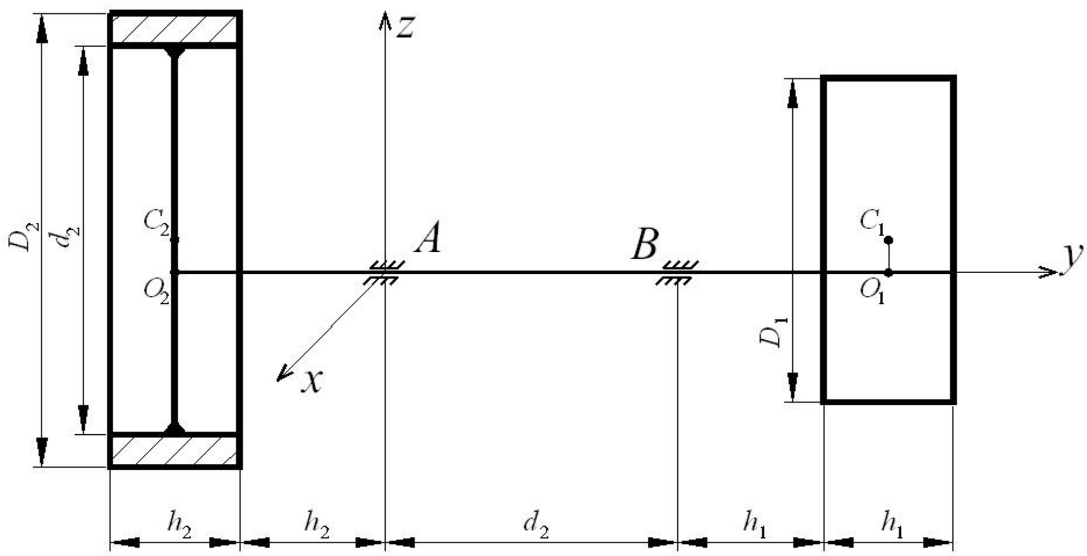


z
A
C1
O1
D1
B
C2
O2
d2
D2
y
x
h2
h1
d2
h1
h2

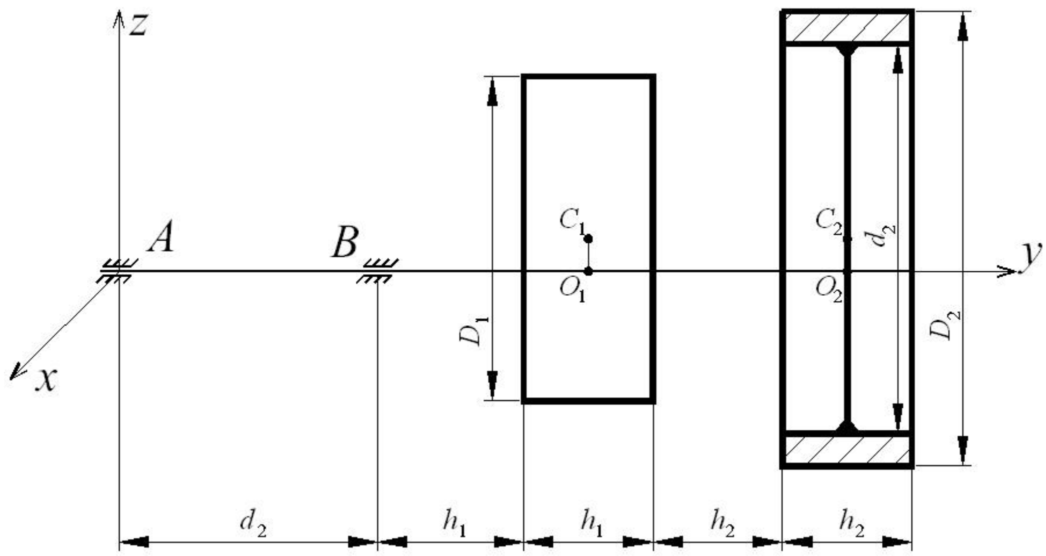
6


z
y
x
A
B
C_1
O_1
C_2
O_2
D_1
d_2
D_2
h_1
h_2
d_2
h_1
h_2

7


z
y
x
A
B
C_2
O_2
C_1
O_1
D_2
d_2
D_1
h_2
h_2
d_2
h_1
h_1

8


z
y
x
A
B
C_1
O_1
C_2
O_2
D_1
d_2
D_2
d_2
h_1
h_1
h_2
h_2

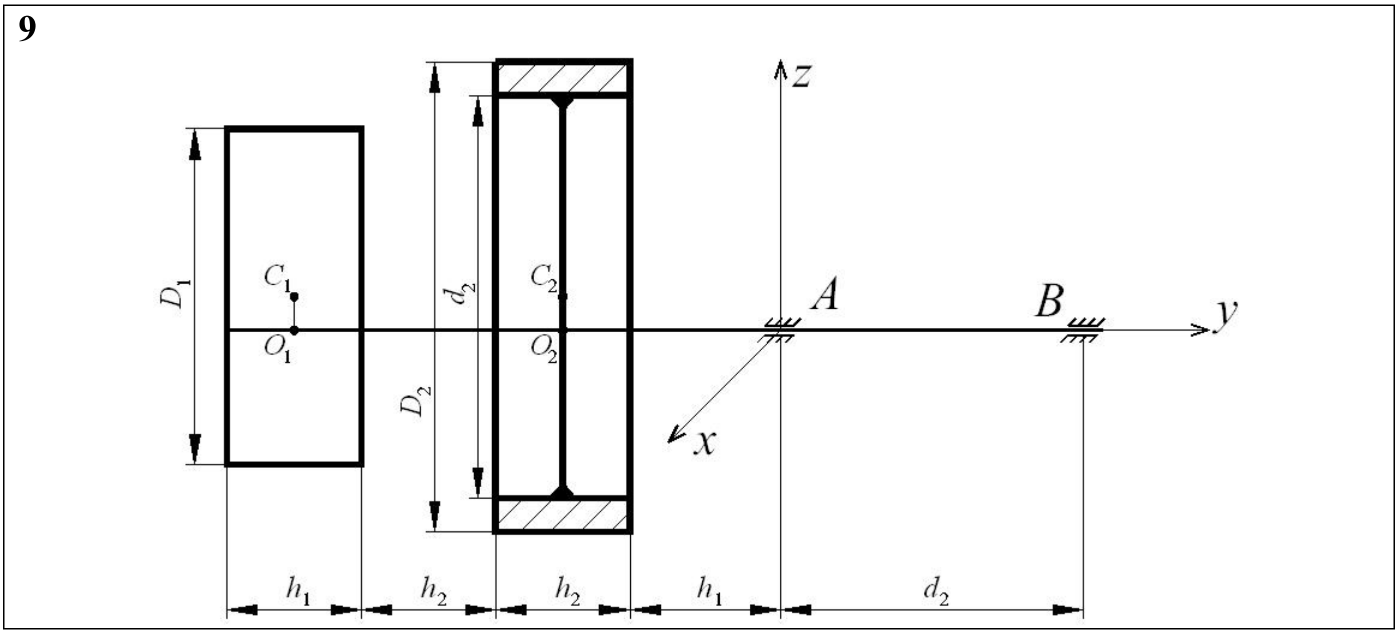


Рис. Д5.1

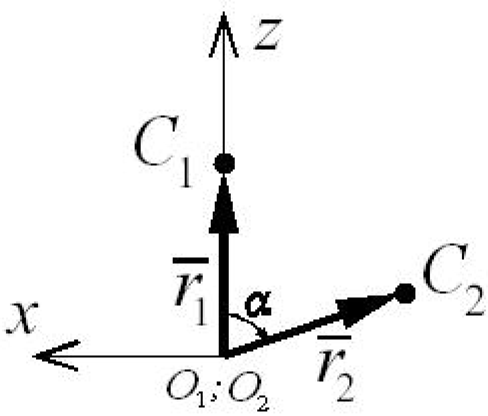


Рис. Д5.2

Таблица Д5-1

Предпоследняя цифра шифра	D_1	h_1	D_2	d_2	h_2	O_1C_1	O_2C_2	n, об/мин	α, °
	м								
0	0,6	0,60	0,90	0,80	0,50	0,005	0,006	1500	45
1	0,7	0,50	1,00	0,85	0,40	0,007	0,008	1200	90
2	0,8	0,45	1,10	0,90	0,30	0,010	0,012	1000	135
3	0,9	0,40	1,20	1,00	0,25	0,012	0,015	750	180
4	1,0	0,35	1,30	1,15	0,20	0,014	0,017	500	225
5	0,9	0,30	0,80	0,70	0,50	0,016	0,019	750	270
6	0,8	0,70	0,75	0,60	0,55	0,018	0,020	1000	315
7	0,7	0,80	0,70	0,55	0,65	0,020	0,022	1500	60
8	0,6	0,90	0,90	0,80	0,70	0,022	0,025	3000	120
9	0,5	1,00	1,00	0,70	0,35	0,025	0,028	6000	180

Пример решения задания Д5.

К горизонтальному валу, закрепленному в подшипниках A и B (рис. Д5.3) жестко прикреплены медный сплошной диск 1 диаметром 1,2 м и шириной 0,10 м и алюминиевый стакан 2 наружным диаметром 1,8 м, шириной 1,0 м и толщиной стенки 0,15 м. Массой вала, а также всеми силами сопротивления пренебречь. Центры тяжести диска и стакана смещены от оси вала на расстояния O_1C_1 = 0,01 м и O_2C_2 = 0,015 м соответственно (где C_1 – центр масс диска, а C_2 – центр масс стакана).

Положение точек C_1 и C_2 определяются радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ (рис. Д5.2).

Вал вращается с постоянной угловой скоростью, соответствующей n = 5000 об/мин.

Определить:

1. Момент инерции данной механической системы относительно оси вращения.
2. Динамические реакции подшипников A и B в момент времени, когда радиус-вектор $\vec{r}_1$ направлен вдоль оси X, а радиус-вектор $\vec{r}_2$ отклонен от него на угол $\alpha = 90°$ по направлению движения часовой стрелки (рис. Д5.2).

Дано: D_1 = 1,2 м; h_1 = 0,10 м; ρ_1 = 8900 кг/м^3; D_2 = 1,8 м; δ = 0,15 м; O_1C_1 = 0,01 м; O_2C_2 = 0,015 м; n = 5000 об/мин; $\alpha = 90°$; ρ_2 = 2700 кг/м^3; H_2 = 1,0 м;

I - ? X_A - ? $У_A$ - ? Z_A - ? X_B - ? $У_B$ - ? Z_B - ?

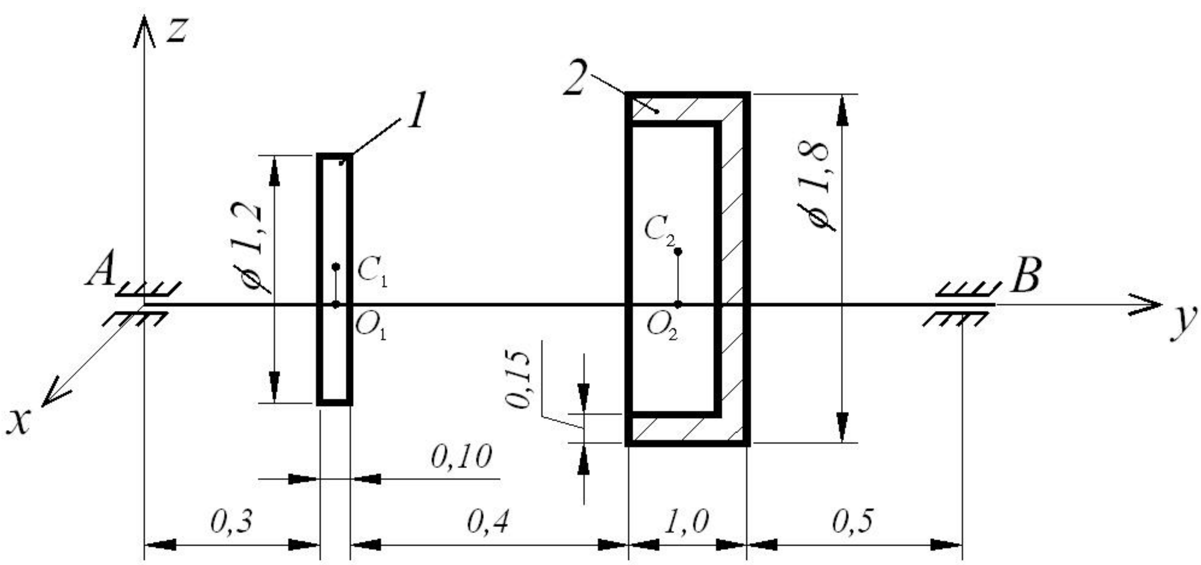


Рис. Д5.3

Решение.

1. Определим массу и координату «у» центра масс диска:

$$m_1 = \rho_1 \cdot V_1 = \rho_1 \cdot \frac{\pi D_1^2}{4} \cdot h_1 = 8900 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 1{,}2^2}{4} \cdot 0{,}10 = 1010 \text{ кг.}$$

где: V_1 – объем диска, м^3;

ρ_1 – плотность меди, ρ_1 =8900 кг/м^3;

Так как диск однородный, то его координата «y_1» в показанной на рис. Д5.3 системе отсчета равна:

$$y_1 = 0{,}3 + \frac{h_1}{2} = 0{,}3 + \frac{0{,}10}{2} = 0{,}35 \text{ м.}$$

Определим массу и координату «у» центра масс стакана:

Для определения веса (силы тяжести) стакана условно разобьем его на две части:

- диск диаметром D_2 = 1,8 м и толщиной δ = 0,15 м;

- кольцо наружным диаметром D_2 = 1,8 м, внутренним диаметром $D_{2в} = D_2 - 2\delta$= = 1,8 - 2·0,15 = 1,5 м и толщиной 1,0 - 0,15 = 0,85 м.

Масса условного диска:

$$m_D = \rho_2 \cdot V_D = \rho_2 \cdot \frac{\pi D_2^2}{4} \cdot \delta = 2700 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 1{,}8^2}{4} \cdot 0{,}15 = 1030 \text{ кг.}$$

где: ρ_2 – плотность алюминия, ρ_2 =2700 кг/м^3;

Координата «у» центра масс условного диска:

$$y_D = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}4 + 1{,}0 - \frac{0{,}15}{2} = 1{,}725 \text{ м.}$$

Масса кольца:

$$m_k = \rho_2 \cdot V_k = \rho_2 \cdot \pi \cdot [\frac{D_2^2}{4} - \frac{(D-\delta)^2}{4}] \cdot (1{,}0 - 0{,}15) =$$

$$= 2700 \cdot 3{,}14 \cdot [\frac{1{,}8^2}{4} - \frac{(1{,}8 - 0{,}15)^2}{4}] \cdot (1{,}0 - 0{,}15) = 930 \text{ кг.}$$

Координата «у» центра масс кольца:

$$y_k = 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}4 + \frac{1{,}0 - 0{,}15}{2} = 1{,}225 \text{ м.}$$

Масса стакана равна:

$$m_2 = m_D + m_k = 1030 + 930 = 1960 \text{ кг}.$$

Координата y_2 точки приложения силы тяжести стакана:

$$y_2 = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{m_2} = \frac{1030 \cdot 1{,}725 + 930 \cdot 1{,}225}{1960} = 1{,}49 \text{ м}.$$

Вес диска и вес стакана:

$$P_1 = m_1 \cdot g = 1010 \cdot 9{,}8 = 9898 \text{ Н}; \qquad P_2 = m_2 \cdot g = 1960 \cdot 9{,}8 = 19208 \text{ Н}.$$

2. Определим момент инерции данной механической системы относительно оси вращения.

Момент инерции системы вал + диск + стакан относительно оси вращения (оси вала) равен:

$$I = I_в + I_д + I_c,$$

где: $I_в$ - момент инерции вала; $I_в = 0$, т.к. массой вала пренебрегаем;

$I_д$ - момент инерции диска;

I_c - момент инерции стакана.

Поскольку ось вращения не совпадает с центром тяжести диска и стакана, для определения их моментов инерции воспользуемся теоремой Штейнера:

$$I_д = m_1 \cdot (O_1C_1)^2 + \frac{1}{2} m_1 \cdot (\frac{D_1}{2})^2 = m_1[(O_1C_1)^2 + \frac{1}{8} D_1^2] = 1010[(0{,}01)^2 + \frac{1}{8} \cdot 1{,}2^2] = 182 \text{ кг·м}^2.$$

Момент инерции стакана относительно оси вращения складывается из момента инерции условных диска и кольца, т.е.

$$I_c = I_{у.д.} + I_{у.к.} = m_D (O_2C_2)^2 + \frac{1}{2} m_D \cdot (\frac{D_2}{2})^2 + m_k \cdot (O_2C_2)^2 + \frac{m_к}{2} \cdot \left[\frac{D_2^2}{4} + \frac{(D_2 - 2\delta)^2}{4} \right] =$$

$$= 1030 \cdot (0{,}015)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1030 \cdot (\frac{1{,}8}{2})^2 + 930 \cdot (0{,}015)^2 +$$

$$+ \frac{930}{2} \cdot \left[\frac{1{,}8^2}{4} + \frac{(1{,}8 - 2 \cdot 0{,}15)^2}{4} \right] = 1056 \text{ кг·м}^2.$$

Таким образом, момент инерции системы относительно оси вращения равен:

$$I = 0 + 182 + 1056 = 1238 \text{ кг·м}^2.$$

3. Определим динамические реакции опор A и B.

Для определения динамических реакций подшипников A и B воспользуемся принципом Даламбера: в любой момент времени векторная сумма главных векторов внешних сил, реакций связей и сил инерции и главных моментов этих сил относительно произвольного центра равняются нулю.

Такой метод решения динамических задач, когда наряду с внешними силами, силами реакций связей рассматриваются и силы инерции, условно приложенные к соответствующим точкам механической системы, позволяет считать, что система находится в состоянии условного равновесия, а, следовательно, позволяет использовать известные из раздела «статика» уравнения равновесия. Данный метод называется методом кинетостатики.

Составим расчетную схему, на которой покажем все внешние силы, силы реакций подшипников A и B и силы инерции (рис. Д5.4).

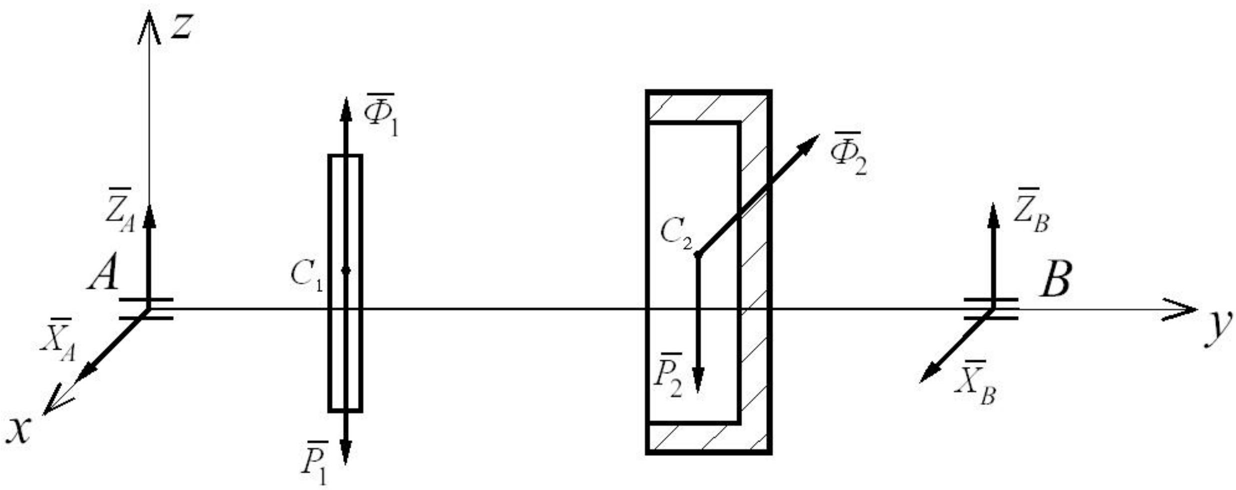


Рис. Д5.4

Внешние силы - $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$.

Силы реакций подшипников - $\vec{X}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{X}_B$ и $\vec{Z}_B$.

Силы инерции. Учитывая, что диск и стакан вращаются с постоянной угловой скоростью, силы инерции, условно прикладываемые к центрам масс диска и стакана, приводятся к главным векторам:

$$\vec{\Phi}_1 = -m_1 \cdot \vec{a}^{\,n}_{C_1}, \text{ и } \vec{\Phi}_2 = -m_2 \cdot \vec{a}^{\,n}_{C_2}, \tag{1}$$

где $\vec{a}^{\,n}_{C_1}$ и $\vec{a}^{\,n}_{C_2}$ - нормальные ускорения точек C_1 и C_2 соответственно.

Знак «минус» в уравнениях (1) означает, что главные векторы сил инерции направлены в сторону, противоположную соответствующему нормальному ускорению точки вращающегося твердого тела.

Нормальные ускорения точек C_1 и C_2 равны:

$$a^n_{C_1} = \omega^2 \cdot O_1C_1 \quad \text{и} \quad a^n_{C_2} = \omega^2 \cdot O_2C_2,$$

где ω – угловая скорость вращения вала.

Угловая скорость ω равна:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 500}{30} = 52{,}3\ \text{с}^{-1}.$$

Нормальные ускорения равны:

$$a^n_{C_1} = (52{,}3)^2 \cdot 0{,}01 = 27{,}4\ \text{м/с}^2;$$

$$a^n_{C_2} = (52{,}3)^2 \cdot 0{,}015 = 41{,}0\ \text{м/с}^2.$$

Координаты точек C_1 и C_2: C_1 (0; 0,35; 0,01) и, в соответствии с условием задачи ($\alpha = 90°$!), C_2 (-0,015; 1,49; 0).

Нормальное ускорение т. C_1 параллельно оси AZ, направлено в сторону, противоположную этой оси. Следовательно, главный вектор $\vec{\Phi}_1$ направлен параллельно оси Z в ту же сторону (рис. Д5.4). Модуль этой силы:

$$\Phi_1 = m_1 \cdot a^n_{C_1} = 1010 \cdot 27{,}4 = 27674\ \text{Н};$$

Нормальное ускорение т.C_2 параллельно оси AX и направлено в ту же сторону. Следовательно, главный вектор $\vec{\Phi}_2$ направлен параллельно оси AX в сторону, противоположную положительному направлению этой оси. Модуль:

$$\Phi_2 = m_2 \cdot a^n_{C_2} = 1960 \cdot 41{,}0 = 80360\ \text{Н}.$$

Силы $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ показаны на рис. Д5.4.

Считаем, что механическая система «вал + диск + стакан» находится в равновесии под действием произвольной пространственной системы сил. Составим уравнения равновесия:

1. $\sum F_{ix} = 0;$ $\quad X_A + X_B - \Phi_2 = 0;$

2. $\sum F_{iy} = 0;$ $\quad 0 = 0;$

3. $\sum F_{iz} = 0;$ $\quad Z_A + Z_B - P_1 - P_2 + \Phi_1 = 0;$

4. $\sum M_x(\vec{F_i}) = 0;$ $\quad Z_B \cdot AB - P_2 \cdot y_2 - P_1 \cdot y_1 + \Phi_1 \cdot y_1 = 0;$

5. $\sum M_y(\vec{F_i}) = 0;$ $\quad 0 = 0;$

6. $\sum M_z(\vec{F_i}) = 0;$ $\quad -X_B \cdot AB + \Phi_2 \cdot y_2 = 0.$

Из (6) уравнения:

$$X_B = \frac{\Phi_2 \cdot y_2}{AB} = \frac{80360 \cdot 1{,}49}{2{,}3} = 52059\,\text{Н}.$$

Из уравнения (1):

$$X_A = \Phi_2 - X_B = 80360 - 52059 = 28301\,\text{Н}.$$

Из уравнения (4):

$$Z_B = \frac{P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 - \Phi_1 \cdot y_1}{AB} = \frac{9898 \cdot 0{,}35 + 19208 \cdot 1{,}49 - 27674 \cdot 1{,}49}{2{,}3} = -3978\,\text{Н}.$$

Из уравнения (3):

$$Z_A = -Z_B + P_1 + P_2 - \Phi_1 = -(-3978) + 9898 + 19208 - 27674 = 5410\,\text{Н}.$$

Ответ: $X_A = 28301\,\text{Н}$; $Z_A = 5410\,\text{Н}$; $X_B = 52059\,\text{Н}$; $Z_B = -3978\,\text{Н}$; $I = 1238$ кг·м^2.

<u>ЗАДАНИЕ Д6.</u> Применение принципа Даламбера для определения реакций связей механической системы

Механическая система (рис. Д6.1), расположенная в вертикальной плоскости, состоит из двух блоков 1 и 2 жестко соединенных между собой и насаженных на общую ось, которая через шарнир (подшипник) *O* опирается на стержни *AO* и *BO*. На каждый из блоков намотана невесомая нерастяжимая нить, на концах которой прикреплены грузы 3 и 4. Блоки считать сплошными однородными цилиндрами, массы m_1 и m_2 и радиусы R_1 и R_2 которых приведены в таблице Д6-1.

Однородные стержни *AO* и *BO*, погонная масса которых *q*, наклонены к вертикали или горизонтали под углами α и β соответственно. Длины стержней *AO* (l_1) и *BO* (l_2) указаны в таблице Д6-1. Крепление стержней в опорах *A* и *B* шарнирное.

К механической системе приложены внешние нагрузки: постоянная сила *T* или постоянный момент *M*.

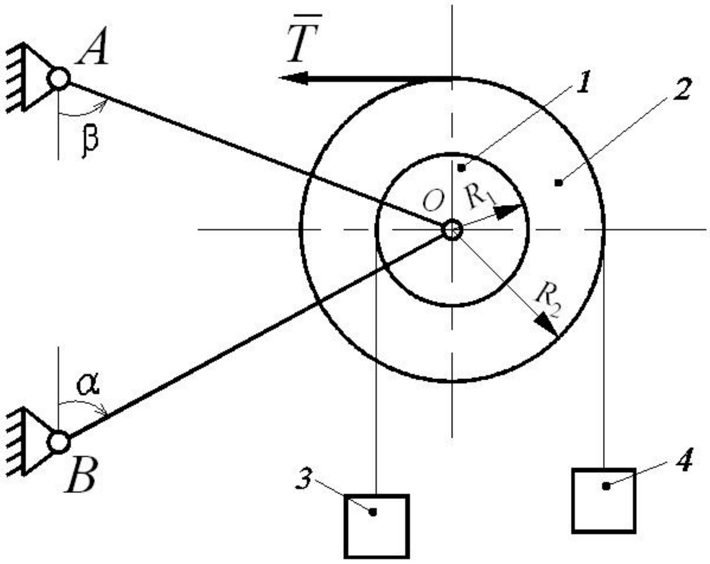
Определить усилия в стержнях.

Указания: 1. Номер схемы на рис. Д6 выбирается в соответствии с последней цифрой шифра.

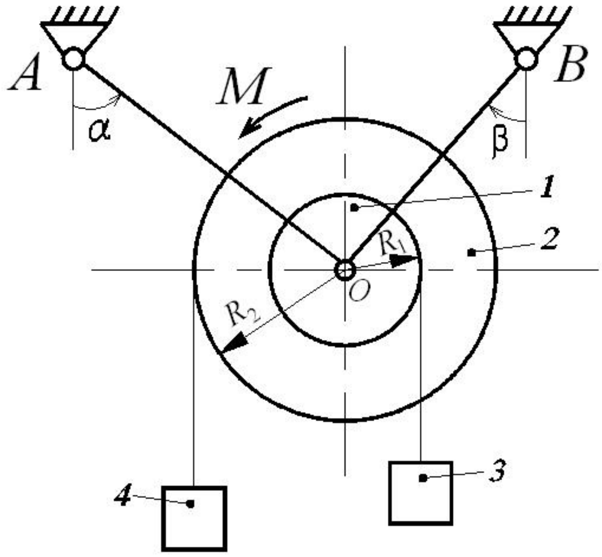
2. Данные из табл. Д6-1 выбираются в соответствии с предпоследней цифрой шифра.

3. Внешнюю нагрузку $\vec{T}$ или *M*, не указанную в Вашем варианте, на расчетной схеме не показывать и в расчетах не учитывать.

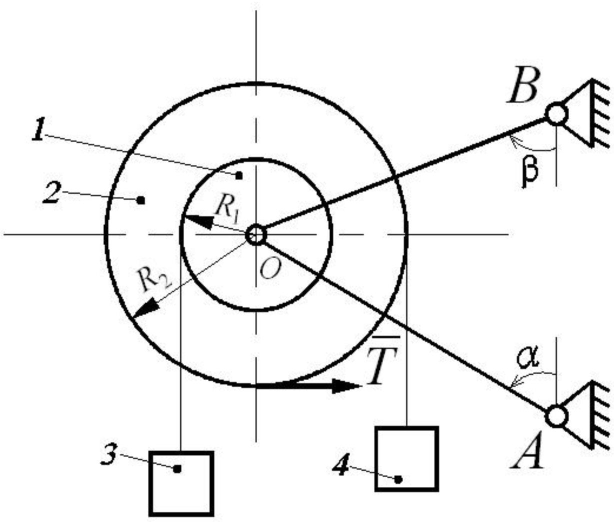
0



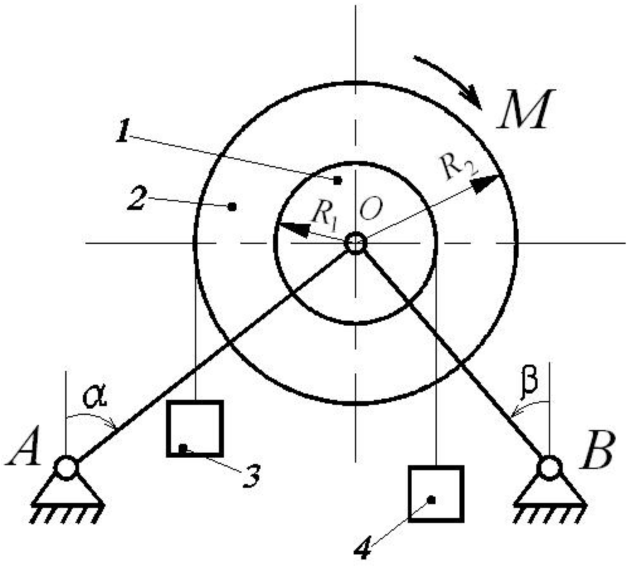
1



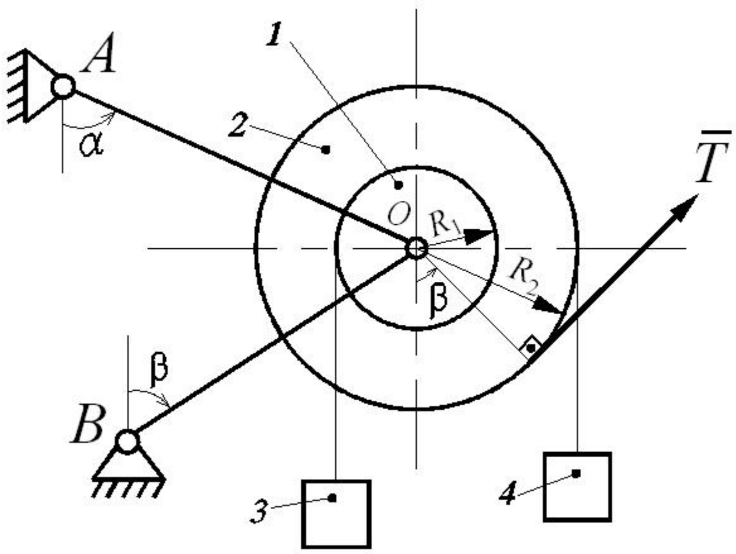
2



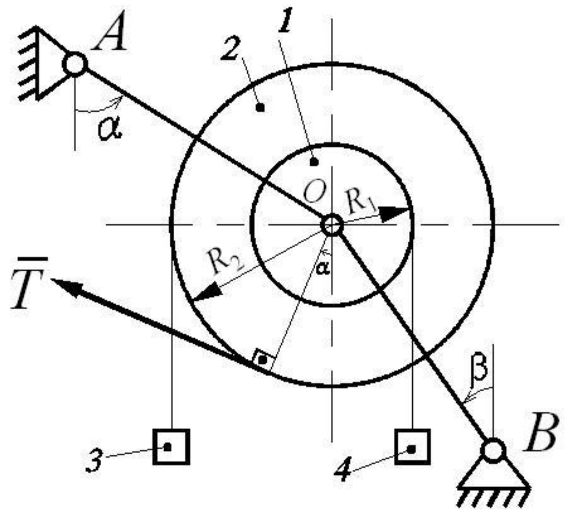
3



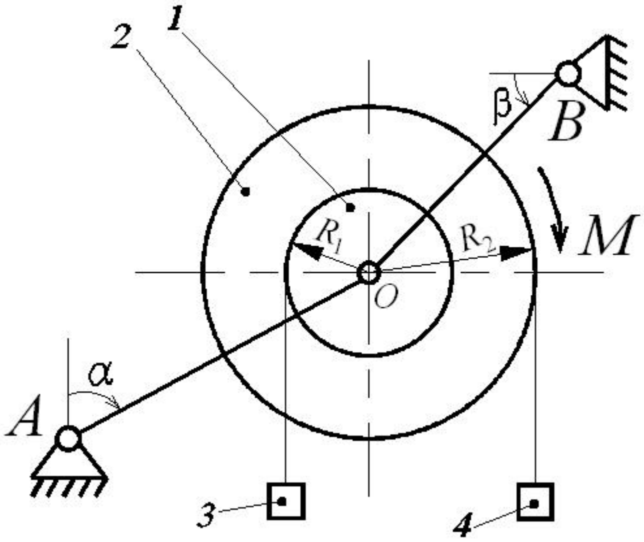
4



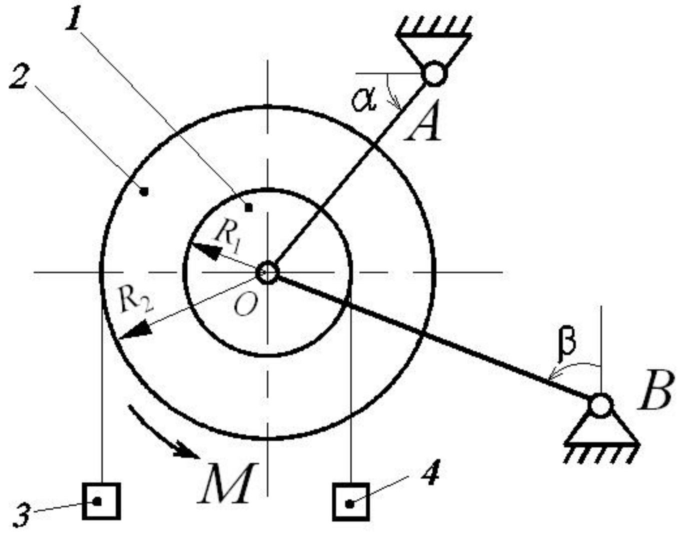
5



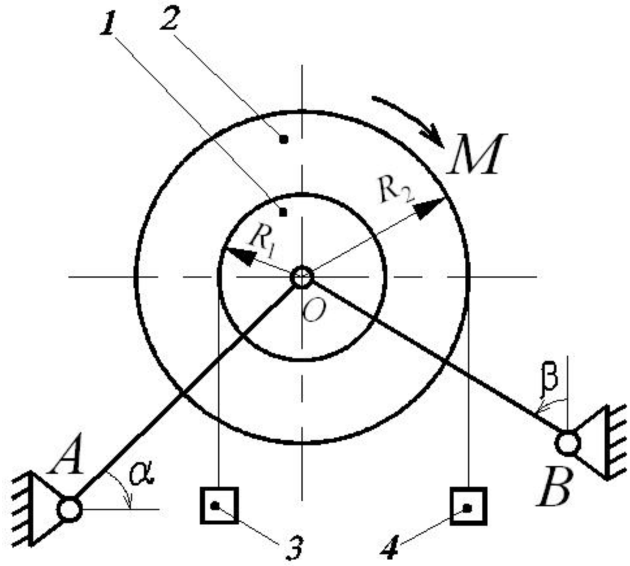
6



7



8



9

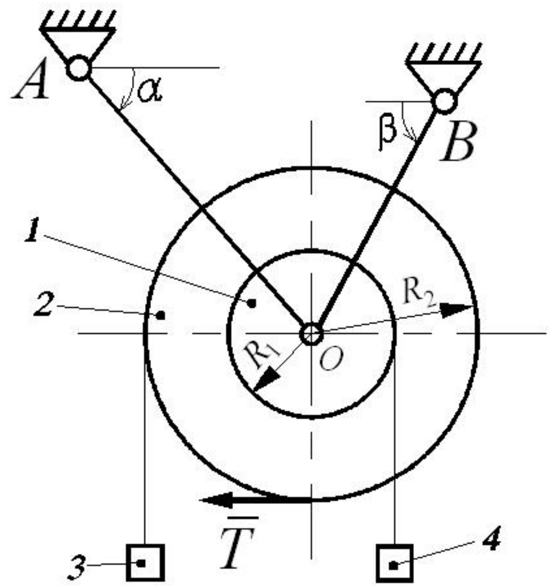


Рис. Д6.1

Таблица Д6-1

Предпоследняя цифра шифра	m_1	m_2	m_3	m_4	R_1	R_2	l_1	l_2	α	β	q,	T,	M,
	кг				**м**				**градус**		**кг/м**	**Н**	**Н·м**
0	40	70	60	100	0,25	0,40	0,8	0,9	30	90	100	1200	480
1	60	100	20	80	0,20	0,50	1,0	1,1	45	60	120	1400	560
2	50	90	70	90	0,30	0,55	1,1	1,2	60	45	140	1600	600
3	30	80	40	70	0,35	0,60	0,9	0,8	60	90	150	1800	640
4	20	60	50	60	0,15	0,30	0,7	0,9	60	30	160	2000	680
5	45	90	100	50	0,40	0,60	1,2	1,0	45	90	180	1000	440
6	70	120	110	70	0,45	0,70	1,3	1,1	45	30	170	900	400
7	80	140	75	85	0,50	0,75	1,4	1,3	45	45	110	2100	720
8	90	180	85	110	0,55	0,80	1,5	1,4	30	60	180	2200	760
9	100	190	95	130	0,60	0,85	1,6	1,5	30	45	190	2300	800

Пример выполнения задания Д6.

Краткое условие задачи (схема представлена на рис. Д6.2):

Дано: m_1 = 55 кг; m_2 = 105 кг; m_3 = 90 кг; m_4 = 80 кг; R_1 = 0,35 м; R_2 = 0,70 м; l_1 = 0,95 м; l_2 = 1,35 м; α = 45°; β = 90°; q = 200 кг/м; T = 2500 Н.

Найти: усилия в стержнях S_1 и S_2 - ?

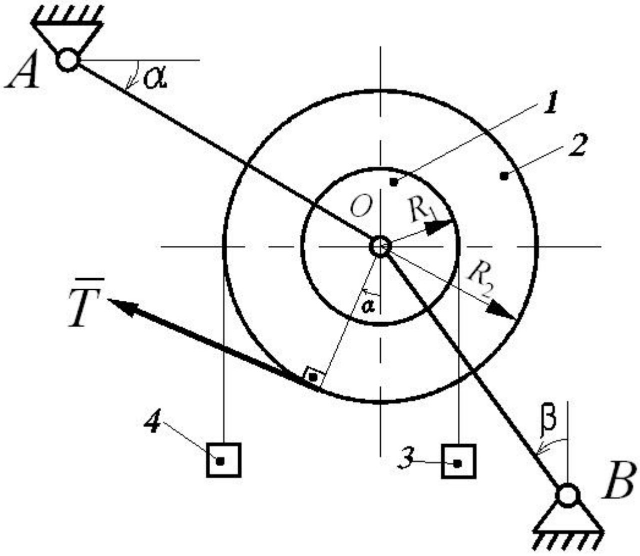


Рис. Д6.2

Решение.

1. Выполняем расчетную схему строго в соответствии с условием задачи (учитываем углы α и β и выбираем линейный масштаб). Расчетная схема, соответствующая условию задачи, представлена на рис. Д6.3.

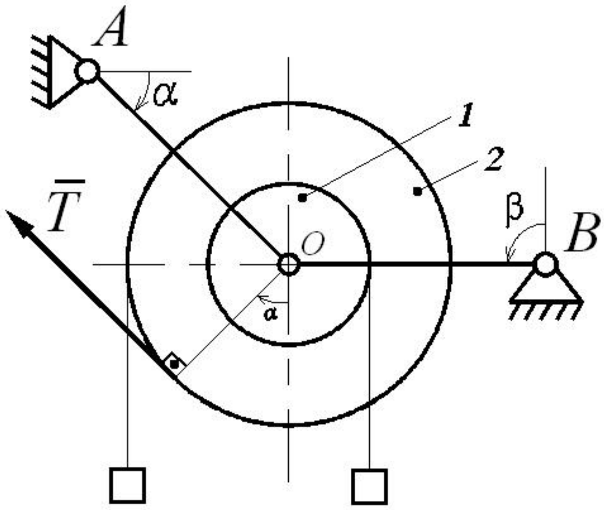


Рис. Д6.3

2. Для решения задачи воспользуемся принципом Даламбера для механической системы (или системы материальных точек): в любой момент времени векторная

сумма главных векторов внешних сил, реакций связей и сил инерции и главных моментов этих сил относительно произвольного центра равняются нулю. Следовательно, необходимо выделить внешние силы, силы реакций связей и силы инерции.

3. Внешние силы.

К внешним силам относятся: сила $\vec{T}$ (направлена под углом 45° к горизонтали), силы тяжести $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$, $m_4\vec{g}$ и силы тяжести стержней AO и BO - $m_5\vec{g}$ и $m_6\vec{g}$ соответственно. Силы $m_5\vec{g}$ и $m_6\vec{g}$ по модулю равны:

$$m_5 g = q \cdot l_1 \cdot g = 200 \cdot 0{,}95 \cdot 9{,}8 \approx 1860\,\text{Н};$$

$$m_6 g = q \cdot l_2 \cdot g = 200 \cdot 1{,}35 \cdot 9{,}8 \approx 2650\,\text{Н}.$$

При этом, массы стержней равны:

$$m_5 = q \cdot l_1 = 200 \cdot 0{,}95 = 190\,\text{кг};$$

$$m_6 = q \cdot l_2 = 200 \cdot 1{,}35 = 270\,\text{кг}.$$

Все вычисления выполняем с точностью до трех значащих цифр.

На рис. Д6.4 покажем эти силы. При этом учитываем, что, поскольку стержни

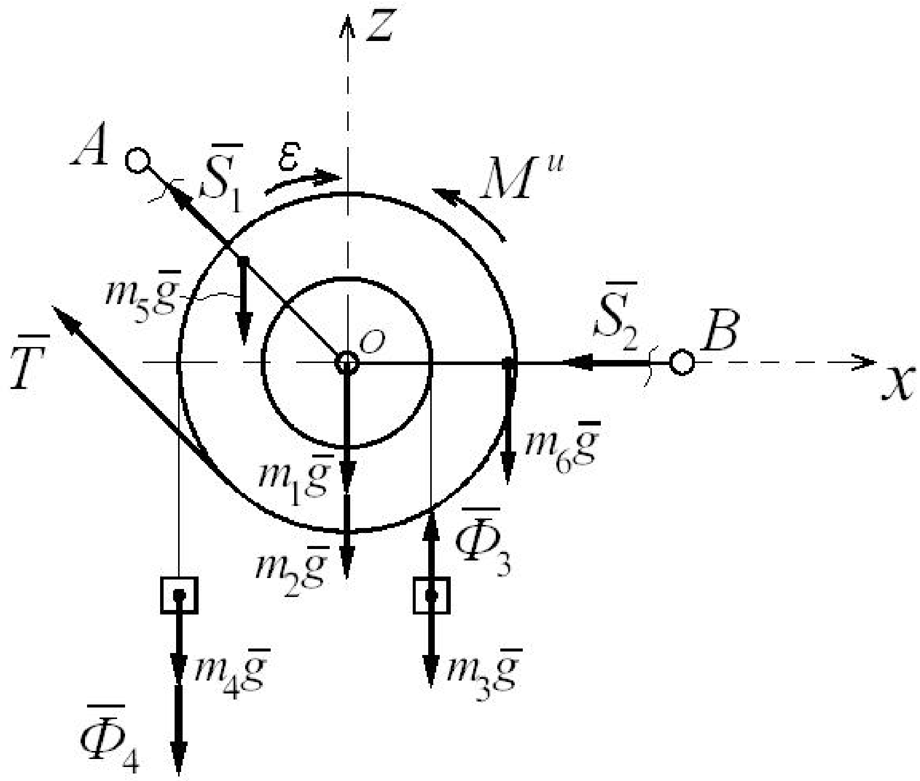


Рис. Д6.4

однородные, силы тяжести $m_5 \vec{g}$ и $m_6 \vec{g}$ приложены в геометрических центрах этих стержней. Таким образом, все внешние нагрузки $\vec{T}$, $m_1 \vec{g}$, $m_2 \vec{g}$, $m_3 \vec{g}$, $m_4 \vec{g}$, $m_5 \vec{g}$ и $m_6 \vec{g}$ на расчетной схеме (рис. Д6.4) показаны.

4. Силы реакций связей.

К силам реакций связей, которые в дальнейшем будем учитывать, относятся усилие $\vec{S}_1$ в стержне AO и усилие $\vec{S}_2$ в стержне BO. Реакции в шарнире O не рассматриваются, т.к. для данной механической системы эти реакции являются силами внутренними.

На рис. Д6.4 покажем $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$. Эти силы показываем направленными вдоль стержней в произвольную сторону.

5. Силы инерции.

При вычислении главного вектора и главного момента сил инерции твердого тела необходимо учитывать вид движения этого тела.

Блоки 1 и 2 жестко соединены друг с другом, сидят на одной оси, поэтому, вращаясь, имеют равные угловую скорость и угловое ускорение. При вращательном движении твердого тела силы инерции приводятся к главному моменту сил инерции, равному

$$M^u = I_z \cdot \varepsilon, \tag{1}$$

и направленному в сторону, противоположную угловому ускорению.

В уравнении (1): I_z - момент инерции блоков 1 и 2 относительно оси вращения;

ε - угловое ускорение блоков.

Момент инерции блоков

$$I_z = I_{z_1} + I_{z_2},$$

где I_{z_1} и I_{z_2} - моменты инерции блока 1 и блока 2 относительно оси вращения соответственно.

Следовательно,

$$I_z = \frac{1}{2}m_1R_1^2 + \frac{1}{2}m_2R_2^2 = \frac{1}{2}\cdot 55\cdot(0{,}35)^2 + \frac{1}{2}\cdot 105\cdot(0{,}70)^2 =$$

$$= 3{,}37 + 25{,}7 \approx 29{,}1 \text{ кг·м}^2.$$

На данном этапе решение задачи определить угловое ускорение блоков по величине не представляется возможным. Поэтому, допустим, что угловое ускорение ε блоков направлено по часовой стрелке (покажем на рис. Д6.4). Тогда, момент сил инерции $M^{и}$ направлен в противоположную сторону.

Грузы 3 и 4 совершают поступательное движение. В этом случае все силы инерции приводятся к главному вектору сил инерции, который, соответственно, равен:

$$\vec{\Phi}_3 = -m_3\cdot\vec{a}_3 \quad \text{и} \quad \vec{\Phi}_4 = -m_4\cdot\vec{a}_4. \qquad (2)$$

Знак «минус» в уравнениях (2) означает, что главный вектор сил инерции направлен в сторону, противоположную ускорению твердого тела.

По модулю силы инерции равны:

$$\Phi_3 = m_3\cdot a_3 \quad \text{и} \quad \Phi_4 = m_4\cdot a_4.$$

Выразим ускорения a_3 и a_4 через угловое ускорение ε:

$$a_3 = \varepsilon\cdot R_1 = 0{,}35\varepsilon, \text{м/с}^2;$$

$$a_4 = \varepsilon\cdot R_2 = 0{,}7\varepsilon, \text{ м/с}^2.$$

Направления $\vec{a}_3$ и $\vec{a}_4$ соответствуют выбранному ранее направлению ε.

С учетом изложенного, покажем на рис. Д6.4 силы инерции $\vec{\Phi}_3$ и $\vec{\Phi}_4$.

6. Принцип Даламбера позволяет решать задачи «динамики» значительно более простыми методами «статики». В соответствии с условием задачи механическая система расположена в вертикальной плоскости. Следовательно, все силы располагаются именно в этой плоскости. Направления сил произвольны. Таким образом, применяя Принцип Даламбера, считаем, что имеет место равновесие механической системы под действием плоской произвольной системы сил. Составим три уравнения равновесия в выбранной и показанной на рис. Д6.4 системе координат:

1. $\sum F_{ix} = 0;$ $\quad -T\cos 45^\circ - S_1 \cos 45^\circ - S_2 = 0;$

2. $\sum F_{iz} = 0;$ $\quad T\sin 45^\circ + S_1 \sin 45^\circ - m_1 g - m_2 g - m_3 g - m_4 g - m_5 g -$

$- m_6 g - \Phi_4 + \Phi_3 = 0;$

3. $\sum M_o(\vec{F_i}) = 0;$ $\quad T \cdot R_2 - M^u + m_3 g R_1 - \Phi_3 \cdot R_1 - m_4 g \cdot R_2 - \Phi_4 \cdot R_2 -$

$- m_5 g \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \cos 45^\circ + m_6 g \cdot \frac{l_2}{2} = 0.$

При составлении третьего уравнения равновесия за положительное направление момента силы принимаем направление момента внешней силы $\vec{T}$, т.е. по часовой стрелке.

Из уравнения (3), с учетом значений сил и момента сил инерции, получим:

$$T \cdot R_2 + g(m_3 R_1 - m_4 \cdot R_2 - m_5 \frac{l_1}{2} \cos 45^\circ + m_6 \frac{l_2}{2}) - I_z \cdot \varepsilon -$$

$$- m_3 \cdot 0{,}35\varepsilon \cdot R_1 - m_4 \cdot 0{,}7\varepsilon \cdot R_2 = 0;$$

Находим угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{T \cdot R_2 + g(m_3 R_1 - m_4 \cdot R_2 - m_5 \frac{l_1}{2} \cos 45^\circ + m_6 \frac{l_2}{2})}{I_z + 0{,}35 m_3 R_1 + 0{,}7 m_4 R_2} =$$

$$= \frac{2500 \cdot 0{,}7 + 9{,}8(90 \cdot 0{,}35 - 80 \cdot 0{,}7 - 190 \frac{0{,}95}{2} 0{,}707 + 270 \frac{1{,}35}{2})}{29{,}1 + 0{,}35 \cdot 90 \cdot 0{,}35 + 0{,}7 \cdot 80 \cdot 0{,}7} = 33{,}6 \text{ с}^{-2}.$$

Силы инерции равны:

$$\Phi_3 = m_3 \cdot a_3 = m_3 \cdot 0{,}35\varepsilon = 90 \cdot 0{,}35 \cdot 33{,}6 \approx 1060 \text{ Н}.$$

$$\Phi_4 = m_4 \cdot a_4 = m_4 \cdot 0{,}7\varepsilon = 80 \cdot 0{,}7 \cdot 33{,}6 \approx 1880 \text{ Н}.$$

Из уравнения равновесия (2):

$$S_1 = \frac{-T\sin 45^\circ + g(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) + \Phi_4 - \Phi_3}{\sin 45^\circ} =$$

$$= \frac{-2500 \cdot 0{,}707 + 9{,}8(55 + 105 + 90 + 80 + 190 + 270) + 1880 - 1060}{0{,}707} = 9610 \text{ Н}.$$

Из уравнения равновесия (1):

$$S_2 = -T\cos 45^\circ - S_1 \cos 45^\circ = -2500 \cdot 0{,}707 - 9610 \cdot 0{,}707 = -8560 \text{ Н}.$$

Ответ: S_1 = 9610 Н; S_2 = -8560 Н.

7. ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Часть II. Динамика. М., 1984. – 430 с.

2. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М., 1983. – 575 с.

3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. теоретическая механика в примерах и задачах. Часть II. Динамика. М., 1964. – 663 с.

4. Лук'янець О.Г., Євдокімов А.І., Калашнікова Т.Г., Татаренко К.О., Нестеренко Т.П. Методичний посібник (довідник) з теоретичної механіки для виконання завдань розрахунково-графічних робіт №5 і №6 (розділ «Динаміка»). Макіївка: ДонНАБА, 2008. – 32 с.

5. Мущанов В.П., Євдокімов А.І., Лук'янець О.Г., Калашнікова Т.Г. Термінологічний довідник (посібник) з теоретичної механіки для використання в навчальному процесі при вивченні курсу «Теоретична механіка». Макіївка, ДонНАБА, 2008. – 30с.

6. Мущанов В.П., Загребельний М.І., Лук'янець О.Г. Методичні вказівки для самостійної роботи студентів з курсу «Теоретична механіка» (Розділ «Динаміка»). Розрахунково-графічна робота РР4. Макіївка: ДонНАБА, 2008. – 35с.

Принцип Даламбера.
Задания и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ

Составители: В.Ф. Мущанов, д.т.н., профессор,
Ф.Ф. Стифеев, к.т.н., доцент,
С.А. Фоменко, ассистент

УДК 378.14

Принцип Даламбера. Задания и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ// Мущанов В.Ф., Стифеев Ф.Ф., Фоменко С.А. - Макеевка: ДонНАСА, 2010, - стр.

Задания и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ на тему «Принцип Даламбера» предназначены для студентов всех специальностей, обучающихся как на стационаре, так и на заочной форме обучения в строительных институтах. Содержат краткие сведения по теории и примеры решения задач.

Составители: В.Ф. Мущанов, профессор, д.т.н.,
Ф.Ф. Стифеев, доцент, к.т.н.,
С.А. Фоменко, ассистент

Отв. за выпуск Ф.Ф.Стифеев, доцент, к.т.н.