ВВЕДЕНИЕ

Условие каждого задания контрольной или расчетно-графической работы сопровождается десятью рисунками и одной таблицей числовых значений заданных величин.

Вариант выбирается согласно шифру студента.

ШИФР – это две последние цифры номера зачетной книжки. Варианты числовых значений заданных величин выбирают по первой цифре шифра (таблица 1), а рисунок выбирают по второй (последней) цифре шифра.

Например, если номер зачетной книжки 09359, тогда шифр студента 59. Числовые значения заданных величин из таблицы 1 берутся по варианту 5, а рисунок к заданию – по варианту 9.

<u>ЗАДАНИЕ Д7.</u> Применение принципа возможных перемещений для определения реакций связей

Составная конструкция *ABC* (или *ABCD*), расположенная в вертикальной плоскости, находится в равновесии под действием приложенных внешних нагрузок (рис. Д7.1).

Пренебрегая весом балок *AC* и *BC*, соединенных шарниром *C*, определить любые две реакции связей. Связи считать идеальными.

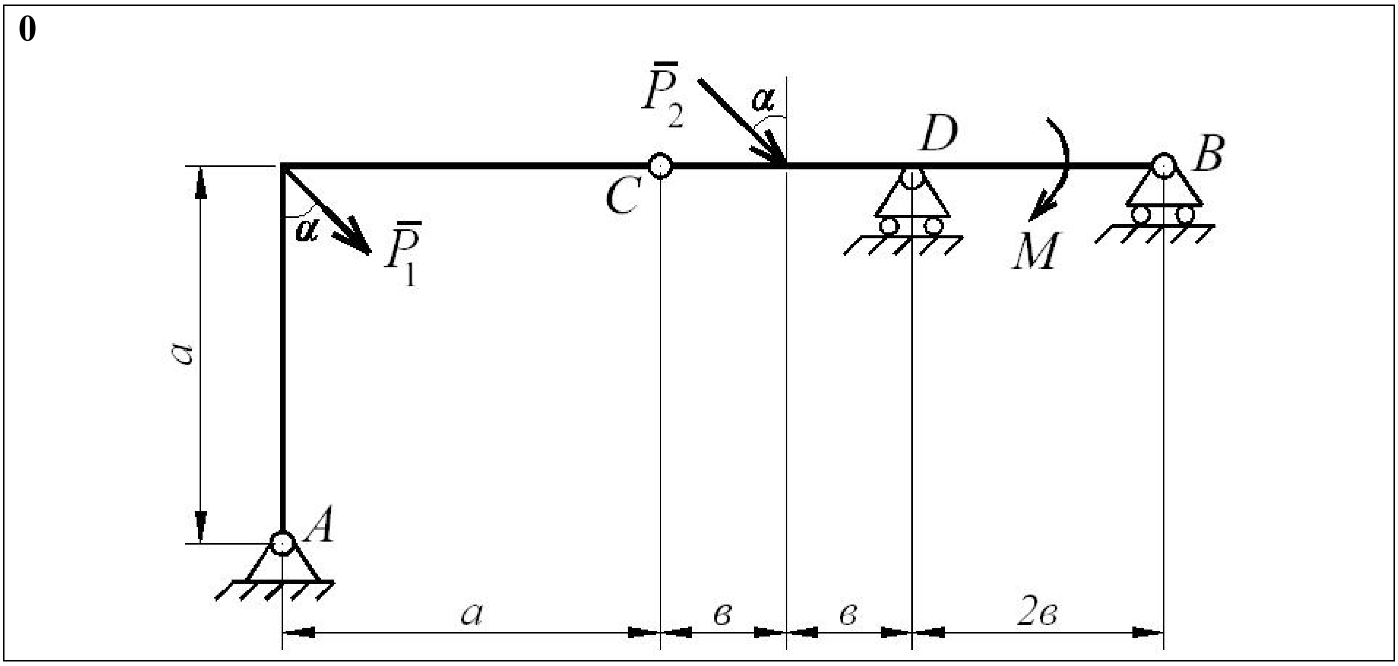
Значения нагрузок, линейных размеров и углов приведены в таблице Д7-1.

Указания: 1. Схему на рис. Д7.1 выбирать согласно последней цифре шифра.

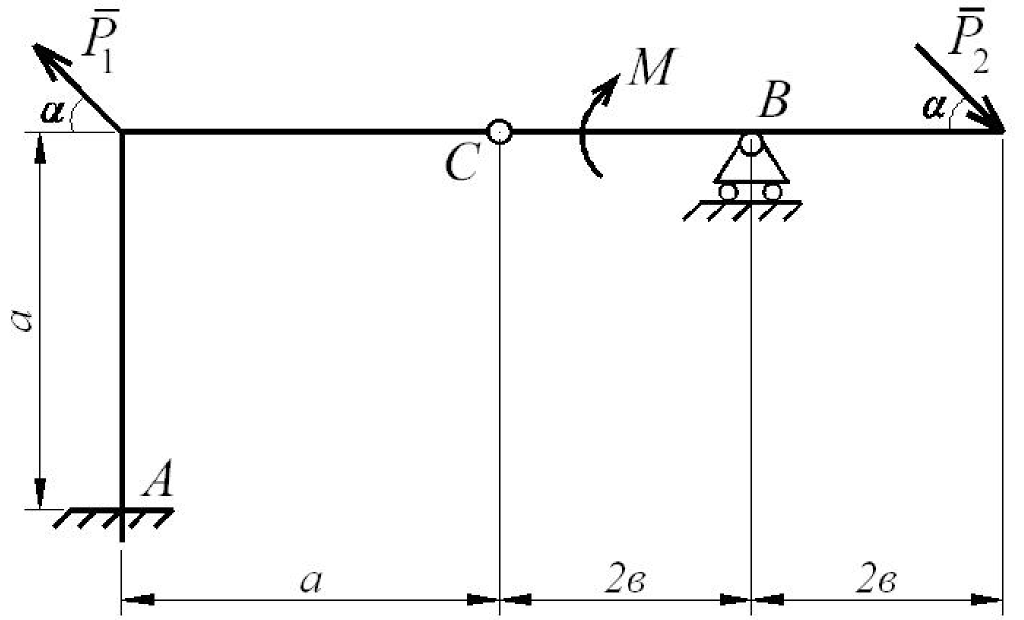
2. Значения параметров из табл. Д7-1 выбирать в соответствии с предпоследней цифрой шифра.

Таблица Д7-1

Предпоследняя цифра шифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_1, кН	6	5	4	3	7	8	9	10	11	12
P_2, кН	8	7	6	5	4	3	2	9	10	11
M, кН·м	7	9	11	10	9	12	13	14	15	16
a, м	0,9	0,8	0,6	0,3	0,5	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8
$в$, м	0,3	0,25	0,2	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
α, град	20	30	40	50	60	70	60	50	40	30

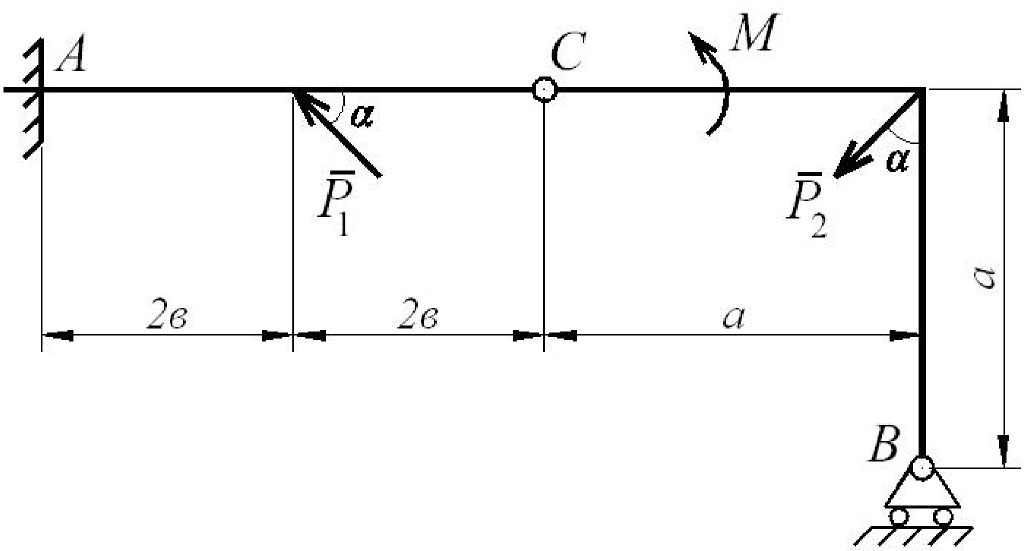


1



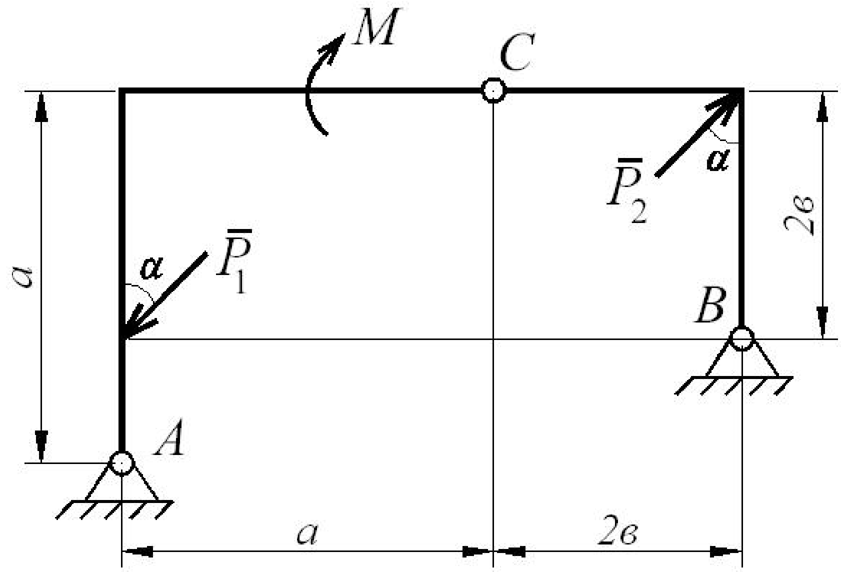
$\bar{P}_1$
α
M
B
$\bar{P}_2$
α
C
a
A
a
2в
2в

2



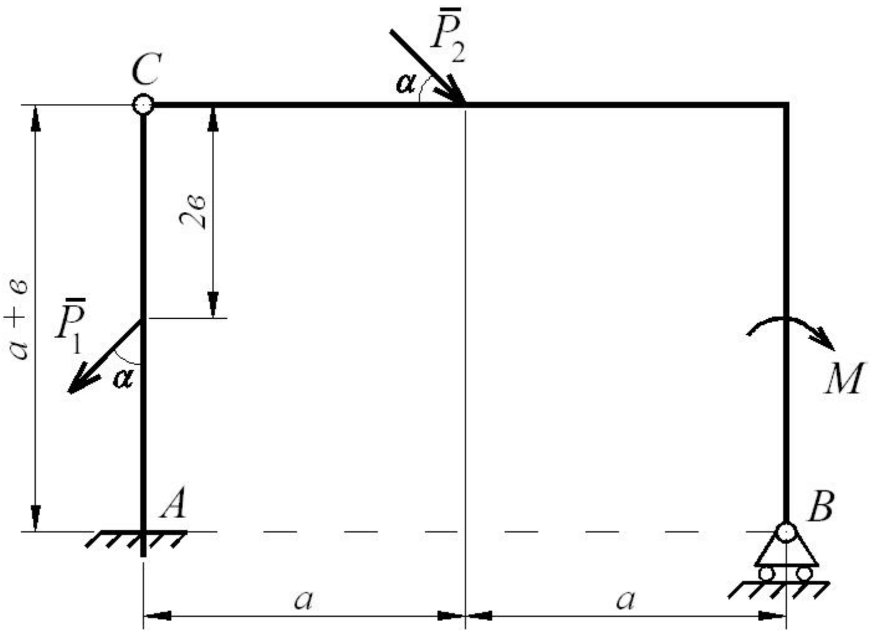
A
C
M
α
$\bar{P}_1$
α
$\bar{P}_2$
a
2в
2в
a
B

3



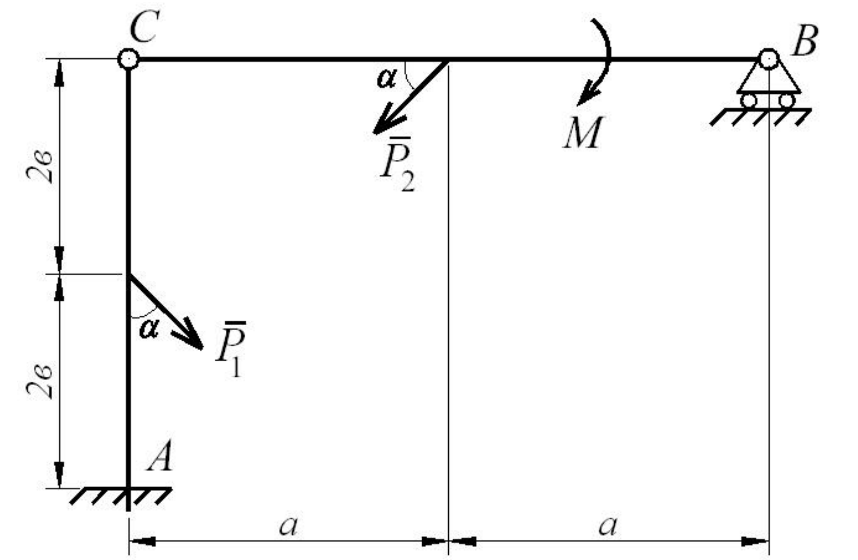
M
C
α
$\bar{P}_2$
2в
a
α
$\bar{P}_1$
B
A
a
2в

4



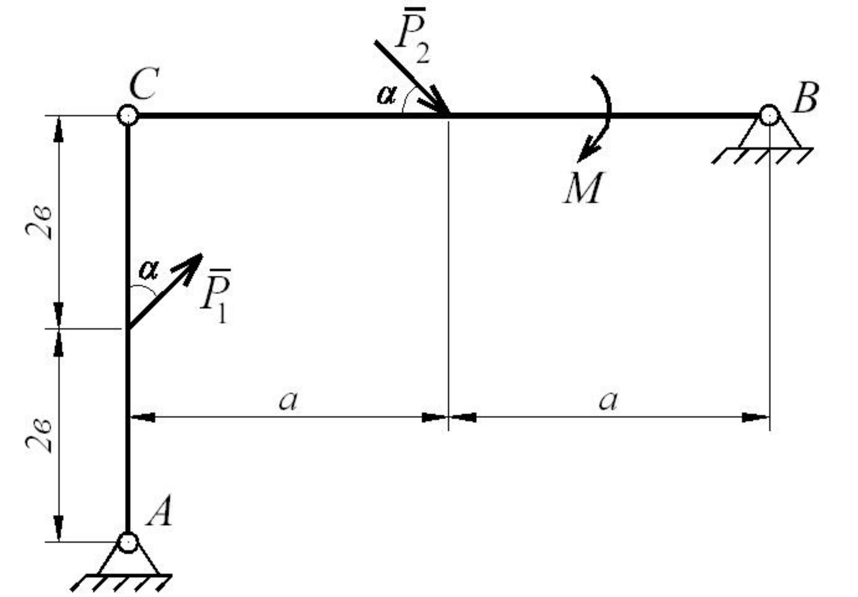
$\overline{P}_2$
C
α
2в
a + в
$\overline{P}_1$
α
M
A
B
a
a

5



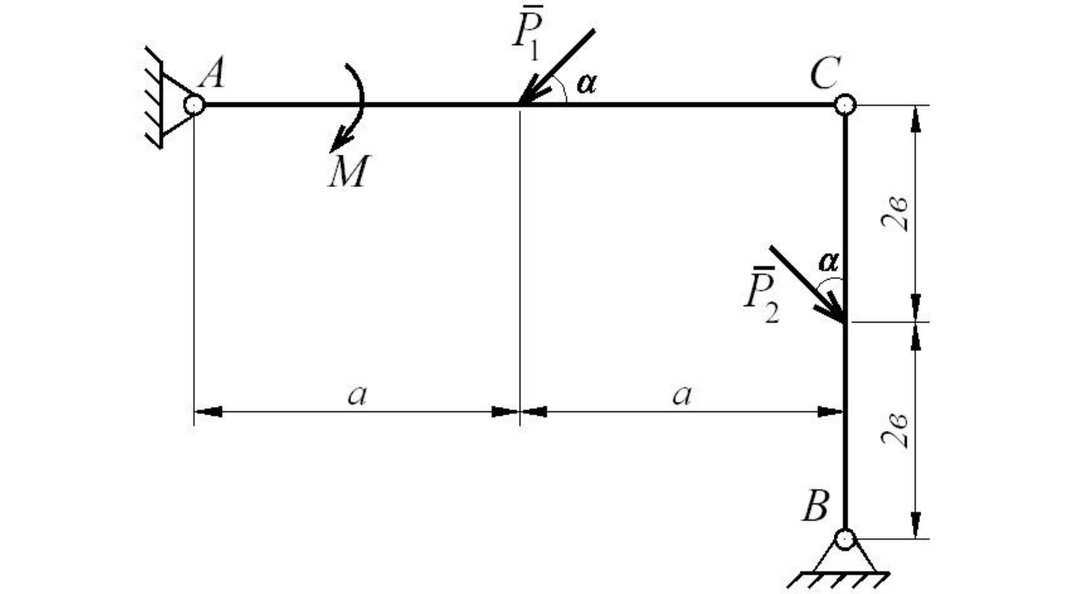
C
B
α
M
$\overline{P}_2$
2в
2в
α
$\overline{P}_1$
A
a
a

6

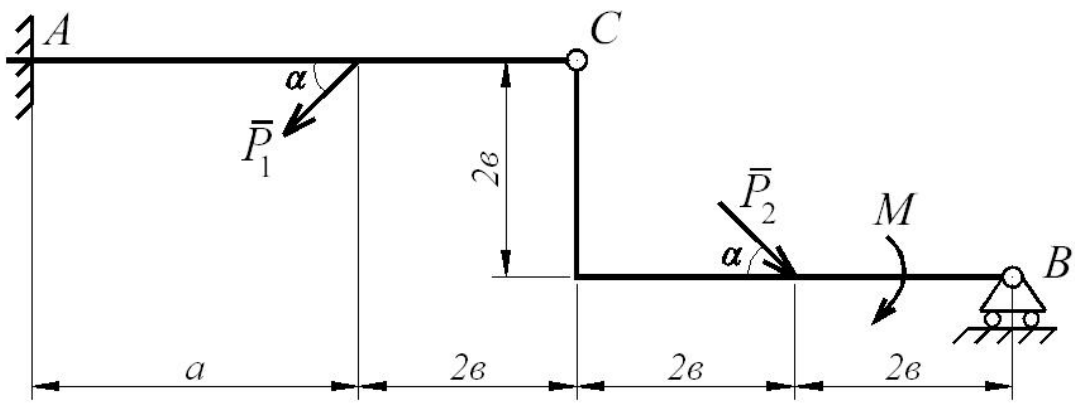


$\overline{P}_2$
C
α
B
M
2в
α
$\overline{P}_1$
a
a
2в
A

7


$\bar{P}_1$
A
α
C
M
2в
α
$\bar{P}_2$
a
a
2в
B

8


A
C
α
$\bar{P}_1$
2в
$\bar{P}_2$
M
α
B
a
2в
2в
2в

9

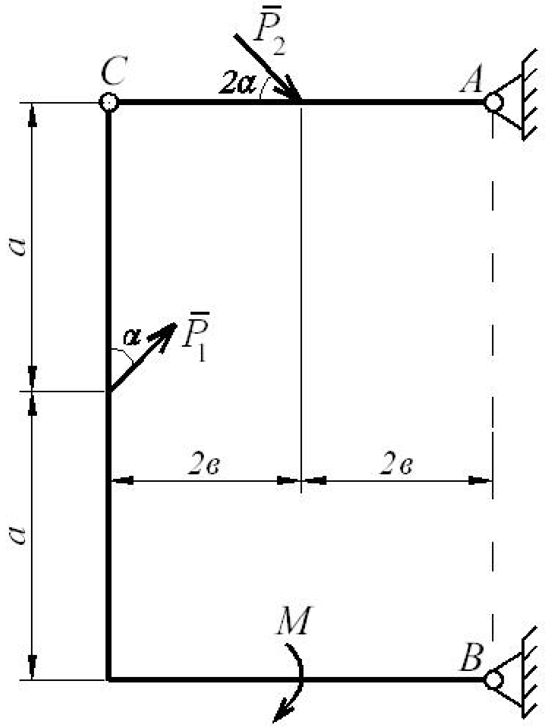

$\bar{P}_2$
C
2α
A
a
α
$\bar{P}_1$
2в
2в
a
M
B

Рис. Д7.1

Пример 1 выполнения задания Д7.

Условие задачи: Определить реакции идеальных связей составной конструкции, изображенной на рис. Д7.2, если заданы следующие параметры: P_1 = 12 кН; P_2 = 18 кН; M = 10 кН·м; a = 1,0 м; $в$ = 0,25 м; α = 45°.

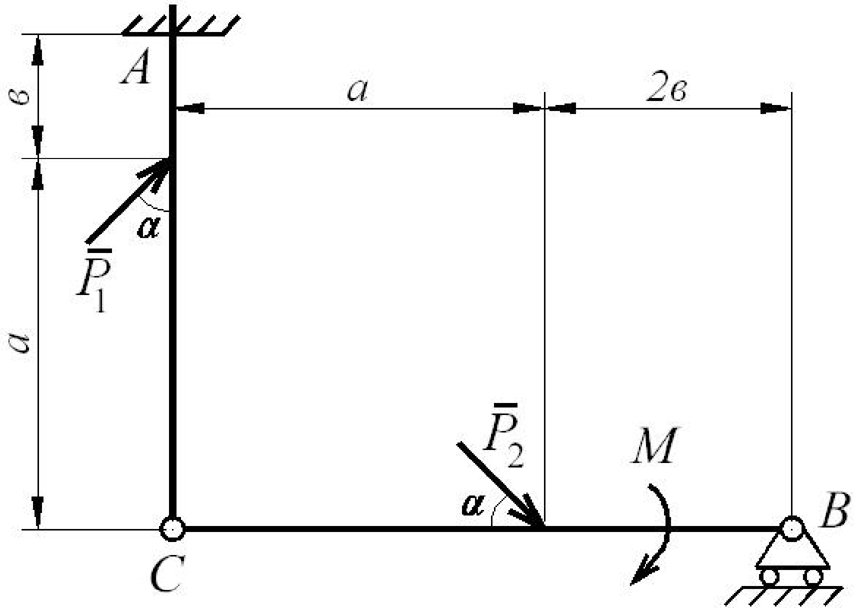


Рис. Д7.2

Решение.

Конструкция состоит из двух балок AC и BC, соединенных между собой шарниром C. Связями для данной конструкции являются жесткая заделка в т. A и подвижный шарнир в т. B. Указанные связи, в соответствии с условием задачи, являются идеальными. Конструкция под действием внешних нагрузок находится в равновесии, а это означает, что данная механическая система (конструкция) имеет <u>ноль</u> степеней свободы.

1. Определение реакции R_B.

Для определения реакции связи B мысленно отбрасываем эту связь, заменяя ее действие на конструкцию реакцией $\vec{R}_B$ этой связи. Таким образом, переводим реакцию $\vec{R}_B$ в разряд внешних сил. Отбросив связь B и заменив ее реакцией $\vec{R}_B$, конструкция условно становится подвижной с одной степенью свободы потому, что балка AC осталась неподвижной, а балка BC имеет возможность вращаться вокруг шарнира C (рис. Д7.3). Поэтому стало возможным дать возможное перемещение δφ

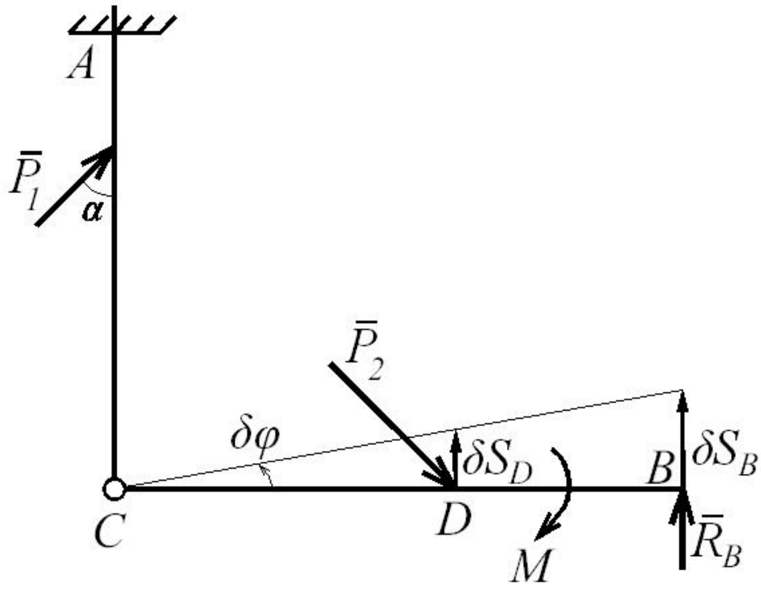


Рис. Д7.3

при вращении балки *BC* вокруг шарнира *C* и составить одно уравнение равновесия на основе принципа возможных перемещений. Из этого уравнения и найдем искомую реакцию R_B.

Переведя реакцию связи *B* в разряд внешних получаем, что на конструкцию действуют силы $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{R}_B$ и момент *M*. Связь *A* является идеальной, поэтому ее реакции не будут входить в уравнение принципа возможных перемещений.

Дадим конструкции возможное перемещение δφ и составим уравнение равновесия на основе принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A_i^e = \delta A_{R_B} + \delta A_M + \delta A_{P_1} + \delta A_{P_2} = 0. \qquad (1)$$

В уравнении (1) элементарные работы равны:

а) силы R_B:

$$\delta A_{R_B} = R_B \cdot \delta S_B;$$

б) момента *M*:

$$\delta A_M = -M \cdot \delta\varphi,$$

здесь взят знак «минус» потому, что направление момента и элементарного угла поворота δφ противоположны;

в) силы P_1:

$$\delta A_{P_1} = 0.$$

Элементарная работа силы $\vec{P_1}$ равна нулю потому, что приложена к неподвижной точке (возможное перемещение $\delta\varphi$ относится только к балке BC; балка AC при этом остается неподвижной);

г) силы P_2:

$$\delta A_{P_2} = -P_2 \sin 45^\circ \cdot \delta S_D,$$

где δS_D – возможное перемещение точки D (точки приложения силы $\vec{P_2}$).

Найдем соотношения между возможными перемещениями $\delta\varphi$, δS_B и δS_D:

$$\delta S_D = \delta\varphi \cdot CD = \delta\varphi \cdot a;$$
$$\delta S_B = \delta\varphi \cdot BC = \delta\varphi \cdot (a + 2в). \qquad (2)$$

Подставим в уравнение (1) значения элементарных работ с учетом выражений (2):

$$R_B \cdot \delta\varphi(a + 2в) - M \cdot \delta\varphi - P_2 \sin 45^\circ \cdot \delta\varphi \cdot a = 0. \qquad (3)$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то определим из уравнения (3) искомую реакцию R_B:

$$R_B = \frac{M + P_2 \cdot a \cdot \sin 45^\circ}{a + 2в} = \frac{10 + 18 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}707}{1{,}0 + 2 \cdot 0{,}25} = 15{,}2 \text{ кН}.$$

2. Определение реакций связи A.

Связь A – жесткое защемление. В общем случае реакции жесткого защемления складываются из реактивного момента M_A и силы реакции, направление которой нам заранее неизвестно. Поэтому, при решении задач целесообразно силу реакции жесткого защемления разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие, например, на вертикальную составляющую и горизонтальную составляющую.

Таким образом, реакции жесткого защемления A состоят из:

а) реактивного момента M_A;

б) горизонтальной составляющей X_A;

в) вертикальной составляющей $У_A$.

2.1. Нахождение реактивного момента M_A.

Для нахождения реактивного момента M_A мысленно отбрасываем связь, которая препятствует вращению балки AC вокруг точки A, заменяя жесткое защемление новой связью – неподвижным шарниром и прикладывая к ней реактивный момент M_A (рис. Д7.4). Таким образом, неизвестную реакцию M_A переводим в разряд внешних нагрузок.

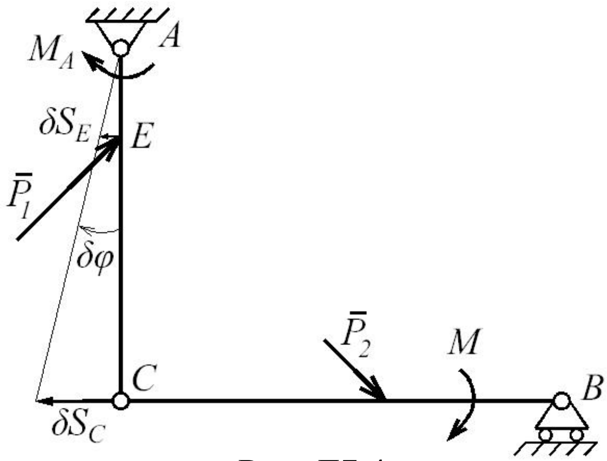


Рис. Д7.4

Вследствие замены связи конструкция становится подвижной с одной степенью свободы потому, что балка AC может вращаться вокруг неподвижного шарнира A, в то же время заставляя балку BC двигаться поступательно. Поэтому дадим системе возможное перемещение δφ при вращении балки AC вокруг шарнира A и составим уравнение равновесия на основе принципа возможных перемещений, из которого и определим искомый реактивный момент M_A.

На конструкцию действуют сосредоточенные силы $\vec{P_1}$ и $\vec{P_2}$ и моменты М и M_A. Связи A (неподвижный шарнир) и B (шарнир подвижный) являются идеальными, поэтому их реакции не входят в уравнение принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A_i^e = \delta A_{M_A} + \delta A_{P_1} + \delta A_{P_2} + \delta A_M = 0. \qquad (4)$$

Определим значение элементарных работ, входящих в уравнение (4):

а) элементарная работа реактивного момента:

$$\delta A_{M_A} = M_A \cdot \delta\varphi;$$

б) элементарная работа силы $\vec{P_1}$:

$$\delta A_{P_1} = -P_1 \sin 45^\circ \cdot \delta S_E = -P_1 \cdot в \cdot \delta\varphi \cdot \sin 45^\circ.$$

Здесь δS_E - элементарное перемещение точки E балки AC, к которой приложена сила $\vec{P_1}$;

в) элементарная работа силы $\vec{P_2}$:

$$\delta A_{P_2} = -P_2 \cos 45^\circ \cdot \delta S_C = -P_2 \cdot (a + в) \cdot \delta\varphi \cdot \cos 45^\circ,$$

где δS_C – элементарное перемещение т.C;

г) элементарная работа момента M:

$$\delta A_M = 0,$$

т.к. балка BC совершает движение без вращения.

Подставляем полученные значения элементарных работ в уравнение (4):

$$M_A \cdot \delta\varphi - P_1 \cdot в \cdot \delta\varphi \cdot \sin 45^\circ - P_2 \cdot (a + в) \cdot \delta\varphi \cdot \cos 45^\circ = 0. \quad (5)$$

Сокращая обе части уравнения (5) на $\delta\varphi \neq 0$, найдем искомый реактивный момент:

$$M_A = [P_1 \cdot в + P_2 \cdot (a + в)]\cos 45^\circ = [12 \cdot 0{,}25 + 18 \cdot (1{,}0 + 0{,}25)] \cdot 0{,}707 = 18{,}0\,\text{кН·м}.$$

2.2. Нахождение горизонтальной составляющей X_A.

Для определения горизонтальной составляющей реакции жесткого защемления $\vec{X}_A$ отбросим связь, которая препятствует горизонтальному перемещению точки A. С этой целью заменим жесткое защемление ползуном в горизонтальных направляющих, который жестко соединен с балкой AC и приложим к ползуну неизвестную реакцию $\vec{X}_A$ (рис. Д7.5). Вследствие замены связи конструкция становится подвижной с одной степенью свободы и <u>вся конструкция может перемещаться поступательно</u>. Дадим системе возможное перемещение δx, направленное вдоль реакции $\vec{X}_A$ и составим уравнение равновесия на основе принципа возможных перемещений (учитываем, что внешние нагрузки в данном случае: $\vec{X}_A$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и M):

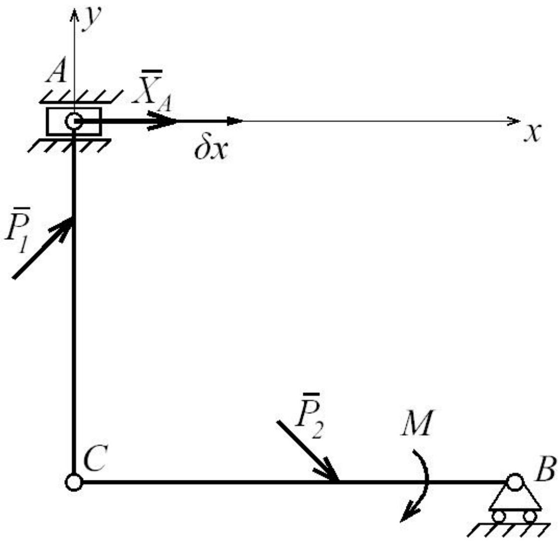


Рис. Д7.5

$$\sum \delta A_i^e = \delta A_{x_A} + \delta A_{P_1} + \delta A_{P_2} + \delta A_M = 0. \quad (6)$$

Вычислим значения элементарных работ, входящих в уравнение (6):

а) элементарная работа силы $\vec{X}_A$:

$$\delta A_{X_A} = X_A \cdot \delta x;$$

б) элементарная работа силы $\vec{P_1}$:

$$\delta A_{P_1} = P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot \delta x;$$

в) элементарная работа силы $\vec{P_2}$:

$$\delta A_{P_2} = P_2 \cdot \cos 45^\circ \cdot \delta x;$$

г) элементарная работа момента *M*:

$$\delta A_M = 0.$$

Работа момента *M* равна нулю, т.к. балка *BC* не совершает вращательного движения.

Следовательно, уравнение (6) примет вид:

$$X_A \cdot \delta x + P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot \delta x + P_2 \cdot \cos 45^\circ \cdot \delta x = 0.$$

Находим искомую реакцию:

$$X_A = -(P_1 + P_2)\cos 45^\circ = -(12 + 18) \cdot 0{,}707 = -21{,}2 \text{ кН}.$$

Знак «минус» означает, что в действительности реакция $\vec{X_A}$ направлена в ту сторону, противоположную той, которая показана на рис. Д7.5.

2.3. Нахождение вертикальной составляющей $У_A$.

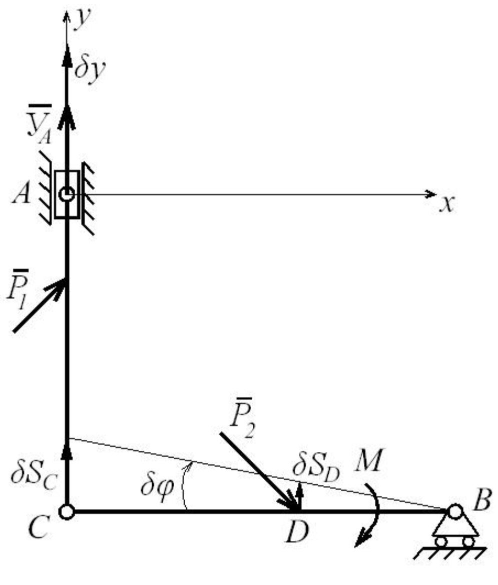


Рис. Д7.6

Так же, как и при определении $\vec{X_A}$, для нахождения вертикальной составляющей $У_A$ отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению точки *A*. Для этого заменим связь «жесткое защемление» другой связью – «ползун, жестко связанный с балкой *AC*, перемещающийся в вертикальных направляющих» и приложим к ползуну неизвестную реакцию $\vec{У_A}$ (рис. Д7.6).

Дадим системе возможное перемещение δy. При этом балка AC будет совершать поступательное движение, а балка BC будет вращаться вокруг точки B. Учитывая, что внешние нагрузки в этом случае $\vec{У}_A$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и M, составим уравнение равновесия на базе принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A_i^e = \delta A_{У_A} + \delta A_{P_1} + \delta A_{P_2} + \delta A_M = 0. \tag{7}$$

Элементарные работы равны:

а) силы $\vec{У}_A$:

$$\delta A_{У_A} = У_A \cdot \delta y;$$

б) силы $\vec{P}_1$:

$$\delta A_{P_1} = P_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot \delta y;$$

в) силы $\vec{P}_2$:

$$\delta A_{P_2} = -P_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \delta S_D = -P_2 \sin 45^\circ \frac{2в}{a+2в} \delta y. \tag{8}$$

В уравнении (8) учтено, что

$$\delta S_D = 2в \cdot \delta\varphi = 2в \frac{\delta S_C}{a+2в} = \frac{2в}{a+2в} \cdot \delta y;$$

г) момента M:

$$\delta A_M = M \cdot \delta\varphi = M \frac{\delta y}{a+2в}.$$

Подставим выражения элементарных работ в уравнение (7):

$$У_A \cdot \delta y + P_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot \delta y - P_2 \sin 45^\circ \frac{2в}{a+2в} \delta y + M \frac{\delta y}{a+2в} = 0.$$

Отсюда:

$$У_A = P_2 \sin 45^\circ \frac{2в}{a+2в} - P_1 \cdot \cos 45^\circ - \frac{M}{a+2в} =$$

$$= 18 \cdot 0{,}707 \frac{2 \cdot 0{,}25}{1{,}0 + 2 \cdot 0{,}25} - 12 \cdot 0{,}707 - \frac{10}{1{,}0 + 2 \cdot 0{,}25} = -10{,}9\,\text{кН}.$$

Знак «минус», как и при нахождении реакции $\overrightarrow{X_A}$, означает что действительное направление реакции $\overrightarrow{У_A}$ противоположно принятому в наших расчетах.

Ответ: R_B = 15,2 кН; M_A = 18,0 кН·м; X_A = -21,2 кН; $У_A$ = -10,9 кН.

Пример 2 выполнения задания Д7.

Условие задачи: Определить реакции идеальных связей составной конструкции, изображенной на рис. Д7.7, если заданы следующие параметры: P_1 = 12 кН; P_2 = 18 кН; M = 10 кН·м; a = 1,0 м; $в$ = 0,25 м; α = 45°.

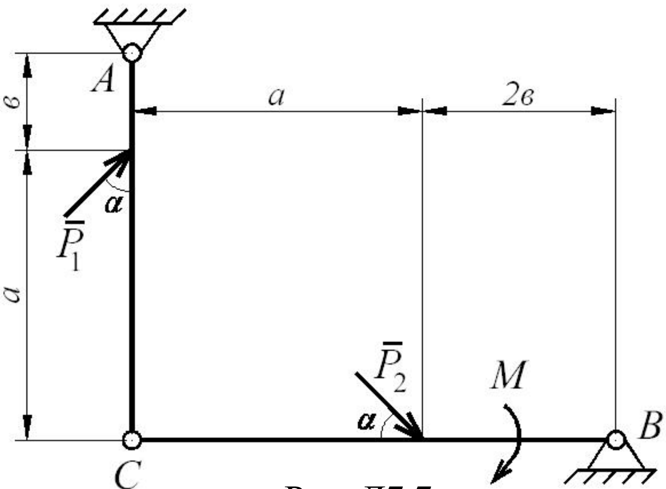


Рис. Д7.7

Решение.

Конструкция состоит из двух балок *AC* и *BC*, соединенных между собой шарниром *C*. Связями для данной конструкции являются неподвижные шарниры *A* и *B*. Конструкция под действием внешних нагрузок находится в равновесии, следовательно, данная механическая система (конструкция) имеет ноль степеней свободы.

При решении задач реакцию неподвижного шарнира раскладывают на две взаимно перпендикулярные составляющие. Это, как правило, горизонтальная и вертикальная составляющие.

1. Определение реакции в шарнире *A*.

1.1. Определение горизонтальной составляющей X_A.

Для этого, имеющуюся связь «шарнир неподвижный» заменим связью «шарнир подвижный» и приложим горизонтальную составляющую $\overrightarrow{X_A}$ (рис. Д7.8). Таким образом конструкция условно стала подвижной с одной степенью свободы за счет того, что балка *AC* может вращаться вокруг шарнира *C*, а балка *BC* осталась неподвижной.

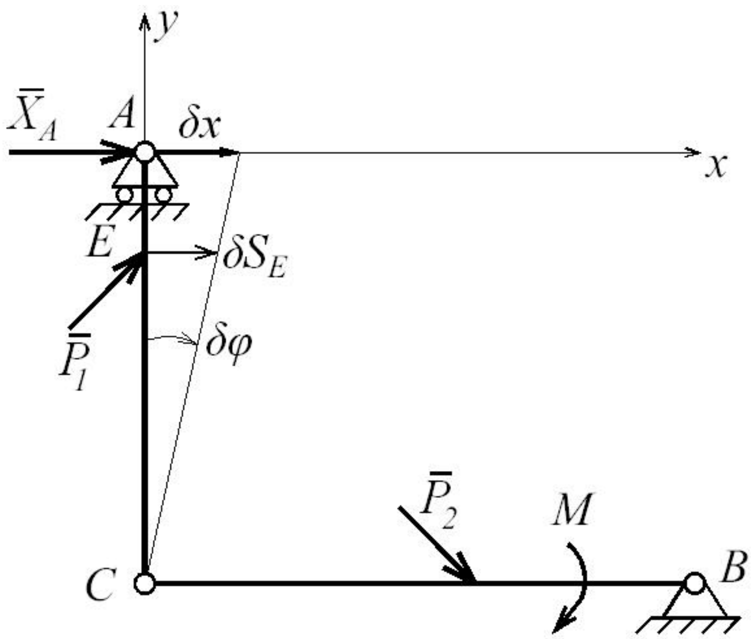


Рис. Д7.8

Дадим системе возможное перемещение δx и составим уравнение равновесия на основе принципа возможных перемещений с учетом, что на эту конструкцию действуют внешние нагрузки $\vec{X}_A$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и M:

$$\sum \delta A_i^e = \delta A_{x_A} + \delta A_{P_1} + \delta A_{P_2} + \delta A_M = 0. \qquad (9)$$

Найдем значения элементарных работ:

а) реакции $\vec{X}_A$:

$$\delta A_{X_A} = X_A \cdot \delta x;$$

б) силы $\vec{P}_1$:

$$\delta A_{P_1} = P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot \delta S_E = P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot \frac{a}{a+в}\delta x;$$

в) силы $\vec{P}_2$:

$$\delta A_{P_2} = 0, \text{ т.к. } \vec{P}_2 \text{ приложена к неподвижной точке;}$$

г) момента M:

$$\delta A_M = 0, \text{ т.к. балка } BC \text{ неподвижна.}$$

Таким образом, уравнение (9) примет вид:

$$X_A \cdot \delta x + P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot \frac{a}{a+в}\delta x = 0.$$

И, искомая реакция равна:

$$X_A = -P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot \frac{a}{a+в} = -12 \cdot 0{,}707 \frac{1{,}0}{1{,}0+0{,}25} = -6{,}8\,\text{кН}.$$

1.2. Определение вертикальной составляющей $У_A$.

Изначально имеющуюся связь «шарнир неподвижный» заменим связью «шарнир подвижный» и приложим вертикальную составляющую $\vec{У}_A$. При этом связь «шарнир подвижный» может быть как опора «на колесах», так и «ползун», имеющий возможность перемещаться в вертикальном направлении и не связанный жестко с соответствующей балкой.

В настоящем примере, в отличие от предыдущего, в качестве «шарнира подвижного» рассмотрим «ползун», перемещающийся в вертикальных направляющих, и подвижный относительно балки AC (рис. Д7.9).

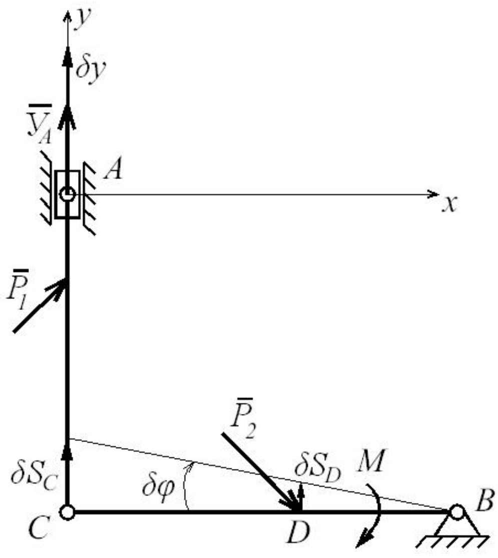


Рис. Д7.9

Заменив связь видим, что конструкция становится подвижной с одной степенью свободы. При этом, балка AC может совершать поступательное движение, а балка BC – вращательное вокруг шарнира B. На расчетной схеме (рис. Д7.9) показаны действующие на механическую систему (конструкцию) внешние нагрузки: $\vec{У}_A$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и M.

Дадим системе возможное перемещение δy и, для нахождения искомой реакции $У_A$, составим уравнение равновесия на основе принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A_i^e = \delta A_{У_A} + \delta A_{P_1} + \delta A_{P_2} + \delta A_M = 0. \tag{10}$$

Определим значения элементарных работ:

а) реакции $\vec{У}_A$:

$$\delta A_{У_A} = У_A \cdot \delta y;$$

б) силы $\vec{P_1}$:

$$\delta A_{P_1} = P_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot \delta y;$$

в) силы $\vec{P_2}$:

$$\delta A_{P_2} = -P_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \delta S_D = -P_2 \sin 45^\circ \frac{2в}{a + 2в} \delta y;$$

г) момента M:

$$\delta A_M = M \cdot \delta\varphi = M \frac{\delta y}{a + 2в}.$$

Подставим вычисленные значения элементарных работ в уравнение (10):

$$У_A \cdot \delta y + P_1 \cdot \cos 45^\circ \cdot \delta y - P_2 \sin 45^\circ \frac{2в}{a + 2в} \delta y + M \frac{\delta y}{a + 2в} = 0;$$

Находим искомую реакцию $У_A$:

$$У_A = P_2 \sin 45^\circ \frac{2в}{a + 2в} - P_1 \cdot \cos 45^\circ - \frac{M}{a + 2в} =$$

$$= 18 \cdot 0{,}707 \frac{2 \cdot 0{,}25}{1{,}0 + 2 \cdot 0{,}25} - 12 \cdot 0{,}707 - \frac{10}{1{,}0 + 2 \cdot 0{,}25} = -10{,}9 \text{ кН}.$$

2. Определение реакции в шарнире B.

2.1. Нахождение горизонтальной составляющей X_B.

Заменяем связь «шарнир неподвижный» новой связью «шарнир подвижный» и прикладываем к т. B горизонтальную составляющую $\vec{X_B}$ (рис. Д7.10). Внешние нагрузки для данной механической системы (составной конструкции): $\vec{X_B}$, $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$ и M. Дадим системе возможное перемещение δx и составим уравнение равновесия на основе принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A_i^e = \delta A_{P_1} + \delta A_{P_2} + \delta A_M + \delta A_{x_B} = 0. \qquad (11)$$

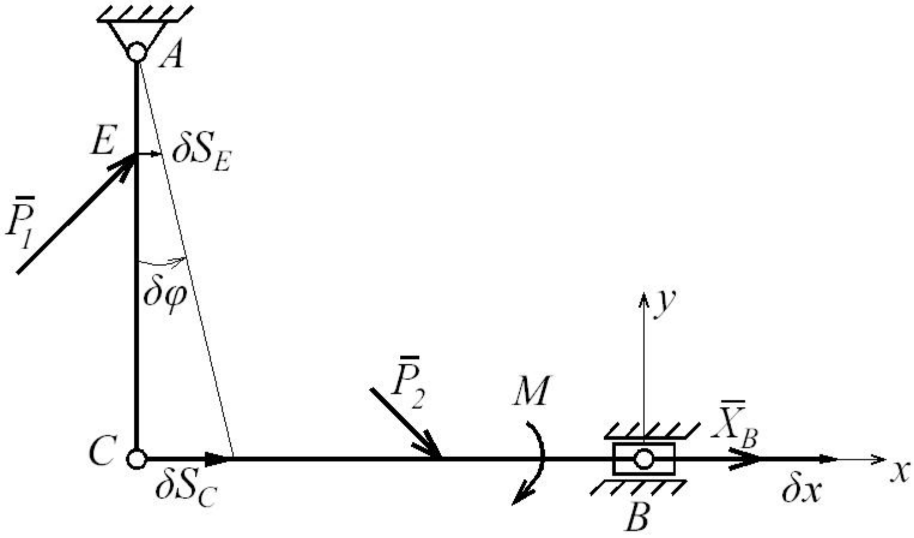


Рис. Д7.10

Элементарные работы равны:

а) силы $\vec{P_1}$:

$$\delta A_{P_1} = P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot \delta S_E = P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot \frac{в}{a + в} \delta x;$$

В этом уравнении учли, что $\delta S_C = \delta x$;

б) силы $\vec{P_2}$:

$$\delta A_{P_2} = P_2 \cos 45^\circ \cdot \delta x;$$

в) момента M:

$$\delta A_M = 0;$$

г) силы $\vec{X_B}$:

$$\delta A_{X_в} = X_B \cdot \delta x.$$

С учетом значений элементарных работ уравнение (11) примет вид:

$$P_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot \frac{в}{a + в} \delta x + P_2 \cos 45^\circ \cdot \delta x + X_B \cdot \delta x = 0.$$

Сокращая обе части на $\delta x \neq 0$, учитывая, что cos 45° = sin 45°, находим искомую реакцию:

$$X_B = -(P_1 \frac{в}{a + в} + P_2) \sin 45^\circ = -(12 \frac{0,25}{1,0 + 0,25} + 18) \cdot 0,707 = -14,4 \,кН.$$

2.2. Определение вертикальной составляющей $У_B$.

Заменяем связь «шарнир неподвижный» новой связью «шарнир подвижный» и прикладываем к т. B вертикальную составляющую $\vec{У}_B$ (рис. Д7.11). К внешним нагрузкам отнесем: $\vec{У}_B$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ и M. Дадим системе возможное перемещение δy и составим уравнение равновесия на основе принципа возможных перемещений (учтем при этом, что балка BC будет вращаться вокруг шарнира C, а балка AC останется неподвижной):

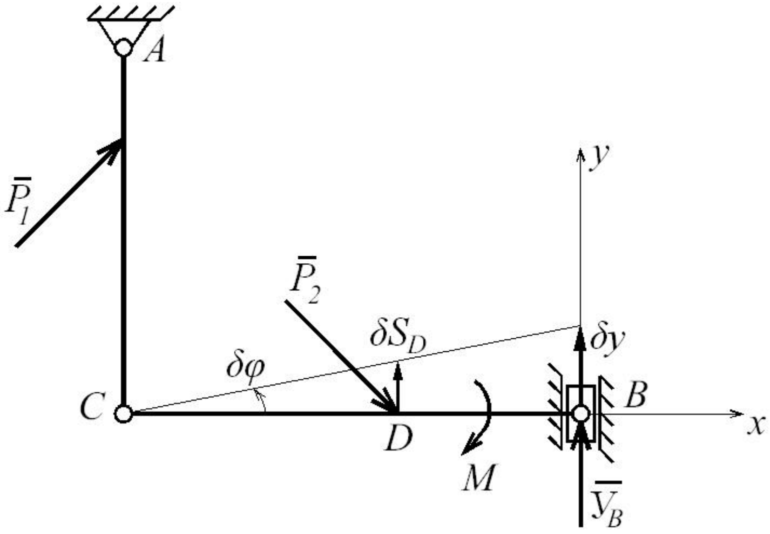


Рис. Д7.11

$$\sum \delta A_i^e = \delta A_{P_1} + \delta A_{P_2} + \delta A_M + \delta A_{У_B} = 0.$$

Элементарные работы:

$$\delta A_{P_1} = 0;$$

$$\delta A_{P_2} = -P_2 \sin 45^\circ \cdot \delta S_D = -P_2 \sin 45^\circ \frac{a}{a+2в}\delta y;$$

$$\delta A_M = -M \cdot \delta\varphi = -M\frac{\delta y}{a+2в};$$

$$\delta A_{У_B} = У_B \cdot \delta y.$$

Следовательно,

$$-P_2 \sin 45^\circ \frac{a}{a+2в}\delta y - M\frac{\delta y}{a+2в} + У_B \cdot \delta y = 0.$$

Решаем полученное уравнение относительно искомой реакции:

$$У_B = \frac{P_2 \sin 45^\circ \cdot a + M}{a+2в} = \frac{18 \cdot 0{,}707 \cdot 1{,}0 + 10}{1{,}0 + 2 \cdot 0{,}25} = 15{,}2 \text{ кН}.$$

Ответ: X_A = -6,8 кН; $У_A$ = -10,9 кН; X_B = -14,4 кН; $У_B$ = 15,2 кН.

<u>ЗАДАНИЕ Д8.</u> Применение общего уравнения динамики для изучения движения механической системы

Механическая система под действием сил тяжести начинает движение из состояния покоя. Начальное положение системы показано на рис. Д8.1.

Массы тел системы m_1, m_2, m_3 и m_4, коэффициент трения скольжения тела 1 по шероховатой поверхности f, внешние радиусы ступенчатых блоков 2 и 3 R_2 и R_3, радиусы инерции этих блоков i_2 и i_3, углы α и β приведены в таблице Д8-1.

Зависимости между внешними и внутренними радиусами ступенчатых блоков указаны на рис. Д8.1.

Каток 4, который катится по наклонной плоскости без скольжения, считать однородным сплошным цилиндром радиуса R_4 (значения R_4 даны в таблице Д8-1).

Силами сопротивления в подшипниках и массами нитей, которые считать нерастяжимыми, пренебречь.

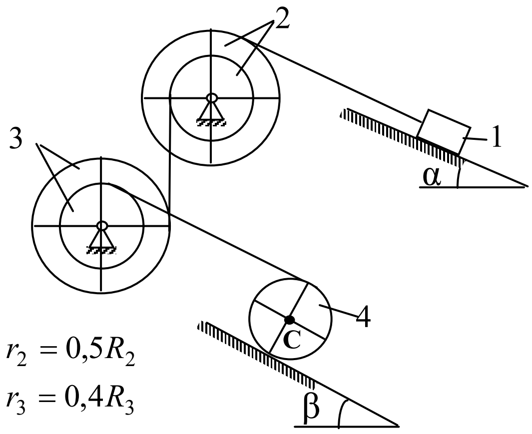
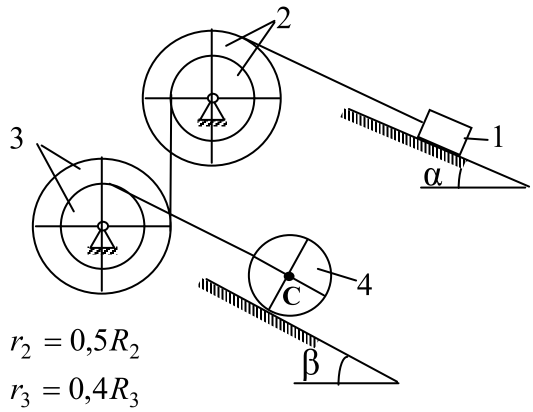
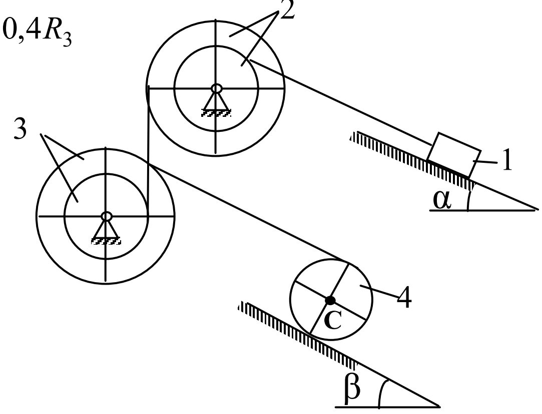
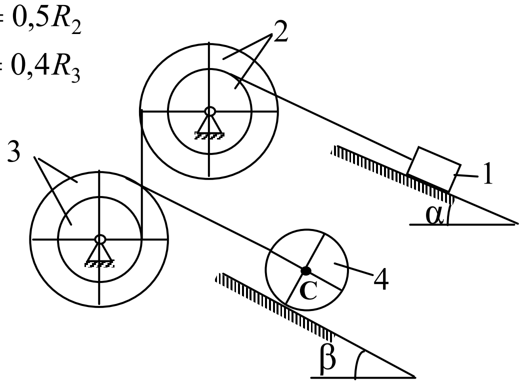
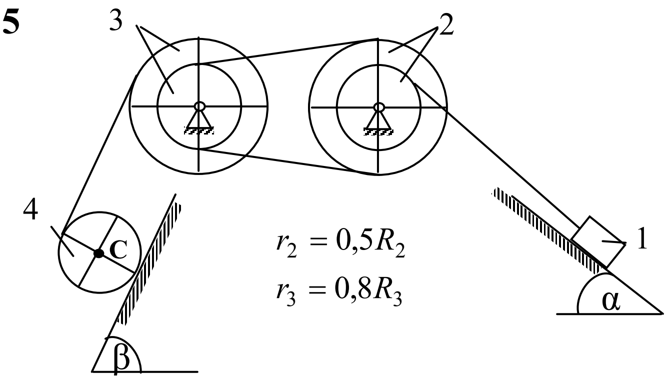
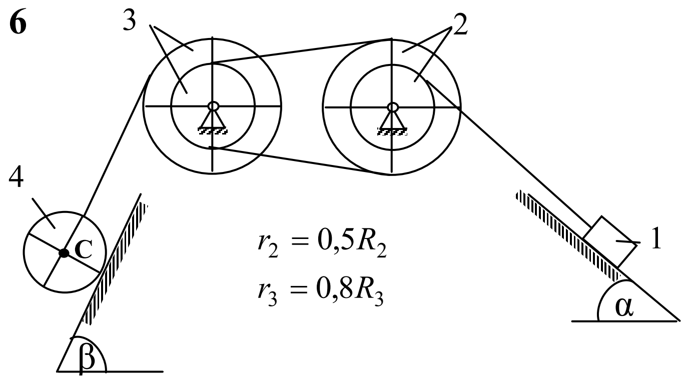
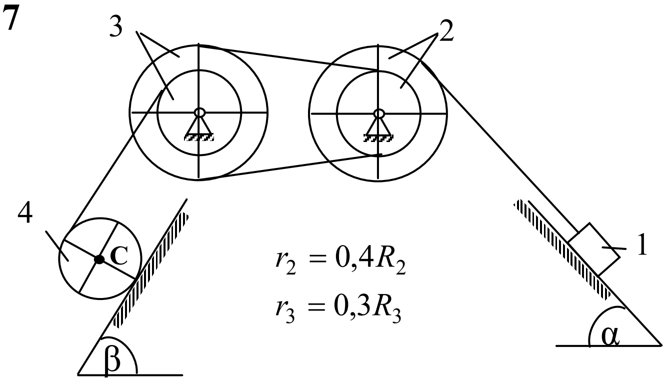
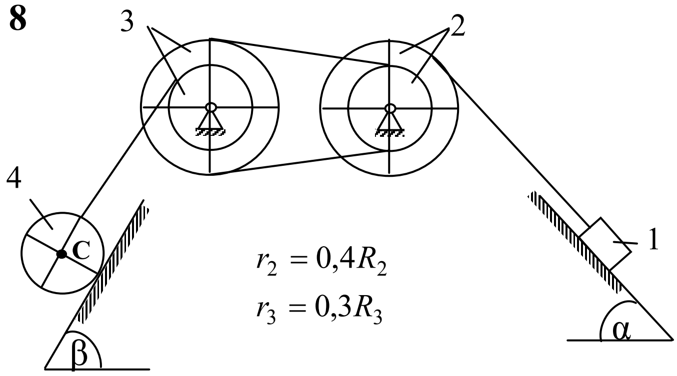
Нити, соединяющие тела 1 и 4 с соответствующими блоками, параллельны наклонным плоскостям.

Определить:

1. Направление движения механической системы.
2. Значения искомых величин, которые указаны в таблицах Д8-1 в столбце «найти», где: a_1 и a_C – ускорения тела 1 и т. C; ε_2, ε_3 и ε_4 – угловые ускорения тел 2, 3 и 4.

Указания: 1. Номер схемы на рис. Д8.1 выбирается в соответствии с последней цифрой шифра.

2. Данные из табл. Д8-1 выбирать согласно предпоследней цифре шифра.

вариант		вариант	
1	 $r_2 = 0{,}5R_2$ $r_3 = 0{,}4R_3$	**2**	 $r_2 = 0{,}5R_2$ $r_3 = 0{,}4R_3$
3	$r_2 = 0{,}5R_2$ $r_3 = 0{,}4R_3$ 	**4**	$r_2 = 0{,}5R_2$ $r_3 = 0{,}4R_3$ 
5	 $r_2 = 0{,}5R_2$ $r_3 = 0{,}8R_3$	**6**	 $r_2 = 0{,}5R_2$ $r_3 = 0{,}8R_3$
7	 $r_2 = 0{,}4R_2$ $r_3 = 0{,}3R_3$	**8**	 $r_2 = 0{,}4R_2$ $r_3 = 0{,}3R_3$

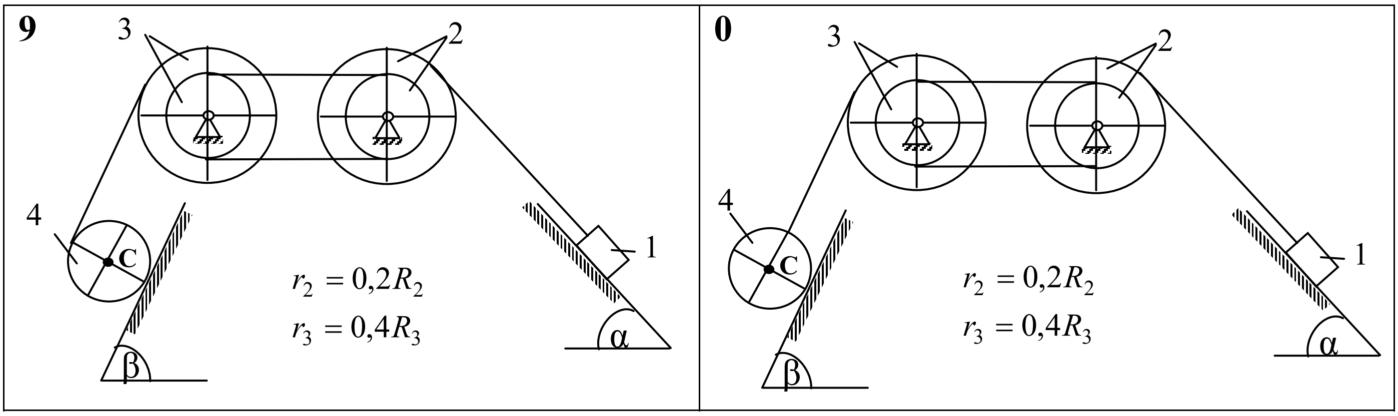


Рис. Д8.1

Таблица Д8-1

Предпоследняя цифра шифра	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	R_4	i_2	i_3	f	α	β	**Найти**
	кг				**м**						**град**		
0	70	0	5	14	0,50	0,40	0,34	0,27	0,22	0,14	75	30	a_1 , ε_4
1	65	5	0	13	0,55	0,45	0,32	0,30	0,25	0,13	70	28	a_C , a_1
2	60	0	4	12	0,60	0,50	0,30	0,33	0,28	0,12	65	26	a_1 , ε_3
3	55	4	0	11	0,65	0,55	0,28	0,36	0,31	0,11	60	24	a_C , a_1
4	50	0	3	10	0,70	0,60	0,26	0,39	0,34	0,10	55	22	a_1 , ε_2
5	45	3	0	9	0,75	0,65	0,24	0,42	0,37	0,09	50	20	ε_4 , a_1
6	40	0	2	8	0,45	0,35	0,22	0,24	0,19	0,08	45	18	ε_3 , a_1
7	35	2	0	7	0,40	0,30	0,20	0,21	0,16	0,07	40	15	a_1 , ε_2
8	30	0	1	6	0,35	0,25	0,15	0,18	0,13	0,06	35	12	a_1 , a_C
9	25	1	0	5	0,30	0,20	0,10	0,15	0,10	0,05	30	10	a_1 , a_C

Пример выполнения задания Д8.

Краткое условие задачи (схема приведена на рис. Д8.2):

Дано: $m_1 = 20$ кг; $m_2 = 0$; $m_3 = 6$ кг; $m_4 = 8$ кг; $R_2 = 0{,}50$ м; $R_3 = 0{,}40$ м; $r_2 = 0{,}6\,R_2$; $r_3 = 0{,}5\,R_3$; $i_2 = 0{,}27$ м; $i_3 = 0{,}20$ м; $f = 0{,}10$; $\alpha = 45°$; $\beta = 30°$; $\delta = 0{,}008$ м; $R_4 = 0{,}30$ м.

Найти: a_1, a_C.

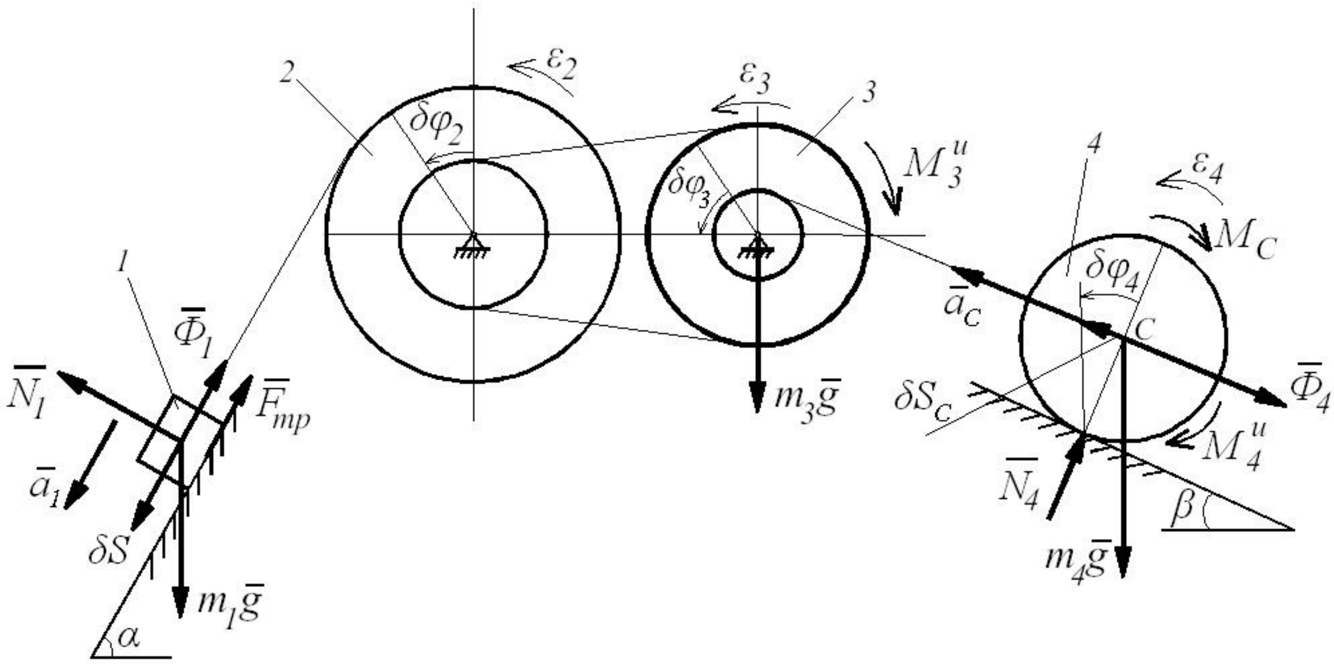


Рис. Д8.2

Решение.

1. Для решения задачи воспользуемся общим уравнением динамики: при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю, т.е.

$$\sum \delta A_i^e + \sum \delta A_i^u = 0.$$

Таким образом, для решения задачи необходимо выделить активные силы, действующие на точки данной механической системы, присоединить к ним все силы (и, если требуется – моменты) инерции, определить число степеней свободы, дать системе возможное (или возможные, если число степеней свободы больше одного) перемещение и определить элементарные работы указанных сил. Силу тяжести блока 2 не показываем, т.к. по условию задачи масса этого тела $m_2 = 0$.

2. Показываем активные силы $m_1 \vec{g}$, $m_3 \vec{g}$ и $m_4 \vec{g}$ на рисунке. К активным силам также следует отнести силу трения скольжения тела 1 о наклонную плоскость $\vec{F}_{тр}$ и момент сопротивления M_C , который имеет место вследствие наличия трения качения катка о наклонную плоскость ($\delta \neq 0$).

Предполагаем, что груз 1 движется вниз с ускорением a_1. Тогда каток 4 поднимается по наклонной плоскости. В соответствии с этим показываем на рис. Д8.2 $\vec{F}_{тр}$ и M_C.

3. Произведем кинематический расчет: выразим угловые ускорения тел 2, 3 и 4 и ускорение т. C через ускорение a_1. Покажем на рисунке эти ускорения.

угловое ускорение блока 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2} = \frac{a_1}{0{,}5} = 2a_1, \text{ с}^{-2};$$

угловое ускорение блока 3:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \frac{r_2}{R_3} = 2a_1 \frac{0{,}6 \cdot 0{,}50}{0{,}40} = 1{,}5a_1, \text{ с}^{-2};$$

ускорение т. C:

$$a_C = \varepsilon_3 \cdot r_3 = 1{,}5a_1 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}40 = 0{,}3a_1, \text{ м/с}^2;$$

угловое ускорение катка 4:

$$\varepsilon_4 = \frac{a_C}{R_4} = \frac{0{,}3a_1}{0{,}30} = a_1, \text{ с}^{-2}.$$

4. Определим силы инерции:

Груз 1 совершает поступательное движение, следовательно:

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = 20a_1, \text{ Н};$$

направлена $\vec{\Phi}_1$ в сторону, противоположную ускорению $\vec{a}_1$.

Масса блока 2 $m_2 = 0$, поэтому главный момент сил инерции $M_2^и = 0$.

Блок 3 совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси. В этом случае все силы инерции приводятся к главному моменту сил инерции, который равен:

$$M_3^{и} = I_3 \cdot \varepsilon_3,$$

и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению блока ε_3.

Момент инерции блока 3:

$$I_3 = m_3 \cdot i_3^2 = 6 \cdot (0{,}20)^2 = 0{,}24 \text{ кг·м}^2.$$

Следовательно:

$$M_3^{и} = 0{,}24 \cdot 1{,}5 a_1 = 0{,}36 a_1, \text{ Н·м}.$$

Каток 4 совершает плоское движение, поэтому все силы инерции приводятся к главному вектору $\vec{\Phi}_4$ и главному моменту $M_4^{и}$. Главный вектор сил инерции равен:

$$\Phi_4 = m_4 a_C = 8 \cdot 0{,}3 a_1 = 2{,}4 a_1, \text{ Н};$$

а главный момент сил инерции равен:

$$M_4^{и} = I_C \cdot \varepsilon_4, \text{ Н·м}.$$

Момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс (учитываем, что каток – сплошной однородный цилиндр) равен:

$$I_C = \frac{1}{2} m_4 \cdot R_4^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (0{,}30)^2 = 0{,}36 \text{ кг·м}^2.$$

Таким образом,

$$M_4^{и} = 0{,}36 a_1, \text{ Н·м}.$$

5. Определим $F_{тр}$ и M_C.

Сила трения равна

$$F_{тр} = f \cdot N_1 = f \cdot m_1 g \cos 45^\circ = 0{,}10 \cdot 20 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}71 = 13{,}9 \text{ Н};$$

Момент сил сопротивления вследствие трения качения катка 4:

$$M_C = \delta \cdot N_4 = \delta \cdot m_4 g \cos 30^\circ = 0{,}008 \cdot 8 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}87 = 0{,}55 \text{ Н·м}.$$

6. Данная механическая система имеет одну степень свободы. Дадим системе одно возможное перемещение δS тела 1 в сторону его движения и определим элементарные перемещения других тел.

Элементарный угол поворота блока 2:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta S}{R_2} = \frac{\delta S}{0{,}50} = 2\delta S, \text{ рад};$$

элементарный угол поворота блока 3:

$$\delta\varphi_3 = \frac{r_2}{R_3}\delta\varphi_2 = \frac{0{,}6\cdot 0{,}50}{0{,}40}2\delta S = 1{,}5\delta S, \text{ рад};$$

возможное перемещение т.C:

$$\delta S_C = \delta\varphi_3 \cdot r_3 = 1{,}5\delta S \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}40 = 0{,}3\delta S;$$

элементарный угол поворота катка 4

$$\delta\varphi_4 = \frac{\delta S_C}{R_4} = \frac{0{,}3\cdot\delta S}{0{,}30} = 1\,\delta S, \text{ рад}.$$

7. Вычислим элементарные работы всех активных сил и сил инерции на возможных перемещениях. Составим общее уравнение динамики:

$$m_1 g\sin\alpha\cdot\delta S - F_{mp}\cdot\delta S - m_4 g\sin\beta\cdot\delta S_C - M_C\delta\varphi_4 - \Phi_1\cdot\delta S -$$
$$- M_3^u\cdot\delta\varphi_3 - \Phi_4\cdot\delta S_C - M_4^u\cdot\delta\varphi_4 = 0,$$

или

$$m_1 g\sin\alpha\cdot\delta S - F_{mp}\cdot\delta S - m_4 g\sin\beta\cdot 0{,}3\delta S - M_C\delta S - 20a_1\cdot\delta S -$$
$$-0{,}36\cdot a_1\cdot 1{,}5\delta S - 2{,}4a_1\cdot 0{,}3\delta S - 0{,}36a_1\cdot\delta S = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $\delta S \neq 0$ и решим относительно искомого ускорения тела 1:

$$a_1 = \frac{m_1 g\sin 45^\circ - F_{mp} - 0{,}3\cdot m_4 g\sin 30^\circ - M_C}{20 + 0{,}54 + 0{,}72 + 0{,}36} =$$

$$= \frac{20\cdot 9{,}8\cdot 0{,}71 - 13{,}9 - 0{,}3\cdot 8\cdot 9{,}8\cdot 0{,}5 - 0{,}55}{21{,}62} \approx 5{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Положительный знак ускорения a_1 подтверждает, что предположение, будто груз 1 опускается по наклонной плоскости, оказалось верным.

Определим ускорение т.C:

$$a_C = 0{,}3\cdot a_1 = 0{,}3\cdot 5{,}2 \approx 1{,}56 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: 1. Груз 1 движется по наклонной плоскости вниз.

2. $a_1 \approx 5{,}2$ м/с^2; $a_C \approx 1{,}56$ м/с^2.

Составители: В.Ф. Мущанов, д.т.н., профессор,
Ф.Ф. Стифеев, к.т.н., доцент,
С.А. Фоменко, ассистент