МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА
УКРАИНЫ

ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И
АРХИТЕКТУРЫ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Уравнение Лагранжа II рода

Задания Д9, Д10 и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ

г. МАКЕЕВКА – 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ

Кафедра «Теоретической и прикладной механики»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Уравнение Лагранжа II рода

Задания Д9, Д10 и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ

Утверждено
на учебно-методическом совете
Протокол №
от

Рассмотрено и утверждено
на заседании кафедры
«Теоретической и прикладной механики»
Протокол № 12 от 16.12.2010 г.

г. Макеевка-2010

УДК 378.14

Теоретическая механика. Уравнение Лагранжа II рода. Задания Д9, Д10 и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ// Мущанов В.Ф., Стифеев Ф.Ф., Фоменко С.А. - Макеевка: ДонНАСА, 2010, - 38 стр.

Задания и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ по теоретической механике (раздел «Уравнение Лагранжа II рода») предназначены для студентов всех специальностей, обучающихся в строительных учебных заведениях III – IV уровня аккредитации. Могут быть использованы как при подготовке к модульному контролю студентов дневной формы обучения, так и в учебном процессе по теоретической механике на заочном факультете. Содержат два задания, краткие сведения по теории и примеры решения задач.

Составители: В.Ф. Мущанов, профессор, д.т.н.,
Ф.Ф. Стифеев, доцент, к.т.н.,
С.А. Фоменко, ассистент

Отв. за выпуск Ф.Ф.Стифеев, доцент, к.т.н.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Уравнение Лагранжа II рода

Задания Д9, Д10 и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ

Составители:

Мущанов Владимир Филиппович

Стифеев Федор Федорович

Фоменко Серафим Александрович

ВВЕДЕНИЕ

Условие каждого задания расчетно-графической работы сопровождается десятью рисунками и двумя таблицами числовых значений заданных величин.

Выбор вариантов совершается согласно с шифром студента.

ШИФР – это три последние цифры номера зачетной книжки. Варианты числовых значений заданных величин выбирают по первой цифре шифра (таблица 1) и по второй цифре шифра (таблица 2). Вариант рисунка выбирают по третьей (последней) цифре шифра.

Например, если номер зачетной книжки 09359, тогда шифр студента 359. Числовые значения заданных величин из таблицы 1 – по варианту 3, из таблицы 2- по варианту 5, а рисунок к заданию – по варианту 9.

<u>ЗАДАНИЕ Д9.</u> Применение уравнения Лагранжа II рода для изучения движения механической системы

Решить задание Д8, используя уравнение Лагранжа II рода.

Указания: 1. Номер схемы на рис. Д8.1 выбирается в соответствии с последней цифрой шифра.

2. Данные из табл. Д8-1 выбирать согласно предпоследней цифре шифра.

Пример выполнения задания Д9 (схема приведена на рис. Д9.1).

Дано: m_1 = 20 кг; m_2 = 0; m_3 = 6 кг; m_4 = 8 кг; R_2 = 0,50 м; R_3 = 0,40 м; r_2 = 0,6 R_2; r_3 = 0,5 R_3; i_2 = 0,27 м; i_3 = 0,20 м; f = 0,10; α = 45°; β = 30°; δ = 0,008 м; R_4 = 0,30 м.

Найти: a_1 и a_C .

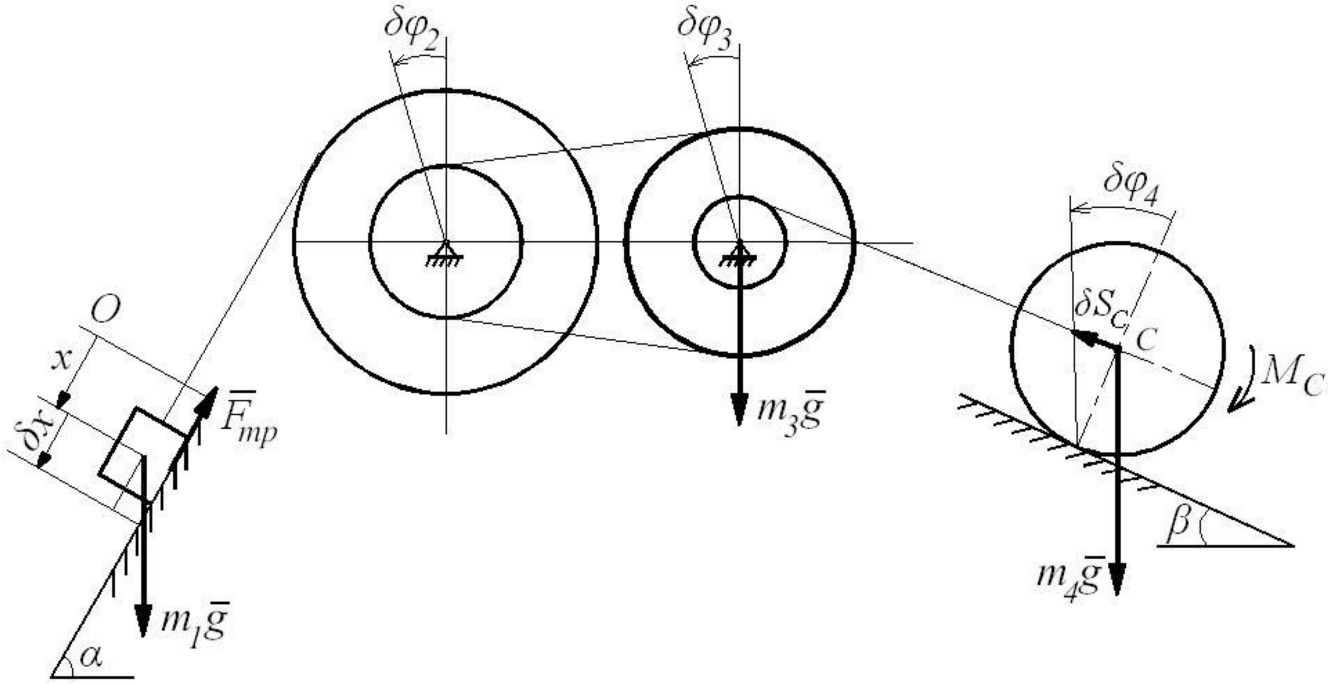

Рис. Д9.1

Решение.

1. Для решения задачи воспользуемся уравнением Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q,$$

где: T – кинетическая энергия механической системы;

q – обобщенная координата;

$\dot{q}$ - обобщенная скорость;

Q – обобщенная сила.

Данная механическая система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем координату x, определяющую положение груза 1, отсчитываемую от центра O (см. рис. Д9.1). Тогда $q = x$, а $\dot{q} = \dot{x}$.

2. Определение кинетической энергии механической системы.

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий тел системы:

$$T = \sum T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Кинетическая энергия груза 1, совершающего поступательное движение:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \dot{x}^2 = 10 \dot{x}^2, \text{ Н·м.}$$

Кинетическая энергия блока 2 равна нулю потому, что его масса равна нулю, т.е.

$$T_2 = 0.$$

Кинетическая энергия блока 3, совершающего вращательное движение, равна:

$$T_3 = \frac{1}{2} I_3 \cdot \omega_3^2,$$

где: I_3 – момент инерции блока 3 относительно оси вращения;

ω_3 – угловая скорость блока 3.

Момент инерции блока 3 определим, зная массу и радиус инерции этого тела:

$$I_3 = m_3 \cdot i_3^2 = 6 \cdot (0{,}20)^2 = 0{,}24 \text{ кг·м}^2.$$

Угловую скорость блока 3 выразим через линейную скорость $\dot{x}$ груза 1:

$$\omega_3 = \frac{r_2}{R_2 \cdot R_3} \dot{x} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}50}{0{,}50 \cdot 0{,}40} \cdot \dot{x} = 1{,}5 \dot{x}, \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно,

$$T_3 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}24 \cdot (1{,}5 \dot{x})^2 = 0{,}27 \dot{x}^2, \text{ Н·м.}$$

Кинетическая энергия катка 4, совершающего плоское движение, равна:

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \cdot \omega_4^2,$$

где: V_C – скорость центра масс катка (т. C);

I_C – момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс;

ω_4 – угловая скорость вращения катка.

Выразим скорости V_C и ω_4 через скорость $\dot{x}$ груза 1:

$$V_C = \omega_3 \cdot r_3 = \frac{r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3} \dot{x} = \frac{0{,}6R_2 \cdot 0{,}5R_3}{R_2 \cdot R_3} \dot{x} = 0{,}3\dot{x}, \text{ м/с};$$

$$\omega_4 = \frac{V_C}{R_4} = \frac{0{,}3 \cdot \dot{x}}{0{,}3} = \dot{x}, \text{ с}^{-1}.$$

Момент инерции катка:

$$I_C = \frac{1}{2} m_4 \cdot R_4^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (0{,}30)^2 = 0{,}36 \text{ кг·м}^2.$$

Кинетическая энергия катка:

$$T_4 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (0{,}3\dot{x})^2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}36 \cdot (\dot{x})^2 = 0{,}54\dot{x}^2, \text{ Н·м}.$$

Таким образом, кинетическая энергия системы равна:

$$T = 10\dot{x}^2 + 0 + 0{,}27\dot{x}^2 + 0{,}54\dot{x}^2 = 10{,}8\dot{x}^2, \text{ Н·м}.$$

3. Продифференцируем значение кинетической энергии T в соответствии с уравнением Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 21{,}6\dot{x};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}(21{,}6\dot{x}) = 21{,}6\ddot{x}.$$

4. Определим обобщенную силу Q, соответствующую обобщенной координате x. Для этого дадим системе положительное приращение δx и определим сумму элементарных работ всех сил, действующих на систему, на полученном перемещении.

При перемещении груза на δx блок 2 повернется на угол $\delta\varphi_2$, блок 3 – на угол $\delta\varphi_3$, каток 4 повернется на угол $\delta\varphi_4$, а его центр масс переместится на δS_C. Выразим эти перемещения через δx:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta x}{R_2} = \frac{\delta x}{0{,}50} = 2\delta x;$$

$$\delta\varphi_3 = \frac{r_2}{R_3}\delta\varphi_2 = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}50}{0{,}40} \cdot 2\delta x = 1{,}5\delta x;$$

$$\delta S_C = \delta\varphi_3 \cdot r_3 = 1{,}5\delta x \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}40 = 0{,}3\delta x;$$

$$\delta\varphi_4 = \frac{\delta S_C}{R_4} = \frac{0{,}3 \cdot \delta x}{0{,}30} = \delta x.$$

Сумма элементарных работ всех активных сил равна:

$$\sum \delta A_i^e = A(m_1 g) + A(F_{тр}) + A(m_4 g) + A(M_C).$$

Элементарная работа силы тяжести $m_3 g$ равна нулю, т.к. эта сила приложена к неподвижной точке.

$$A(m_1 g) = m_1 g \cdot \sin\alpha \cdot \delta x = 20 \cdot 9{,}8 \cdot \sin 45^\circ \cdot \delta x = 139\delta x,\ \text{Н·м};$$

$$A(F_{тр}) = -F_{тр} \cdot \delta x = -f m_1 g \cos\alpha \cdot \delta x = -0{,}10 \cdot 20 \cdot 9{,}8 \cdot \cos 45^\circ \cdot \delta x = -13{,}9\delta x;$$

$$A(m_4 g) = -m_4 g \cdot \delta S_C \cdot \sin\beta = -8 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3\delta x = -11{,}8\delta x;$$

$$A(M_C) = -M_C \cdot \delta\varphi_4 = -\delta \cdot m_4 g \cdot \cos\beta \cdot \delta x = -0{,}008 \cdot 8 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}87\delta x = -0{,}55\delta x.$$

Следовательно,

$$\sum \delta A_i^e = 139\delta x - 13{,}9\delta x - 11{,}8\delta x - 0{,}55\delta x \approx 113\delta x,\ \text{Н·м}.$$

Обобщенная сила:

$$Q = \frac{\sum A_i^e}{\delta x} = \frac{113\delta x}{\delta x} = 113\ \text{Н}.$$

Подставляем полученные результаты в уравнение Лагранжа II рода:

$$21{,}6\ddot{x} = 113.$$

Таким образом, ускорение груза 1:

$$a_1 = \ddot{x} = \frac{113}{21{,}6} = 5{,}2\ \text{м/с}^2.$$

Ускорение т. C определим, дважды дифференцируя по времени уравнение $\delta S_C = 0{,}3\ \delta x$:

$$a_C = \ddot{S}_C = 0{,}3\ddot{x} = 0{,}3 \cdot 5{,}2 = 1{,}56\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: 1. Груз 1 движется по наклонной плоскости вниз.

2. $a_1 = 5{,}2$ м/с^2; $a_C = 1{,}56$ м/с^2.

Составители: В.Ф. Мущанов, д.т.н., профессор,
Ф.Ф. Стифеев, к.т.н., доцент,
С.А. Фоменко, ассистент