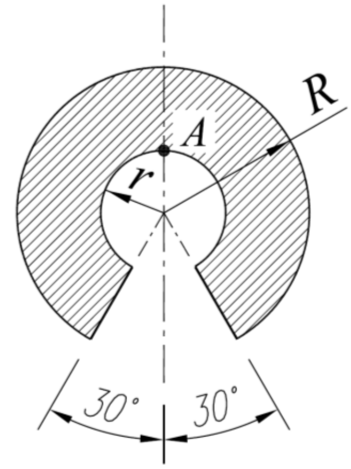
Задача 1

Определить соотношение радиусов *R/r* для указанной фигуры, при котором ее центр тяжести будет размещаться в точке *A*.



Решение

Введем систему осей (x,y) так, чтобы ось y совпадала с осью симметрии фигуры (рис. 1). Тогда центр тяжести фигуры будет иметь координаты (0, y_c). Найдем координату y_c. Рассмотрим элементарный сектор с углом $d\varphi$, расположенный под углом φ к оси x. Площадь фигуры в рамках выделенного сектора составляет:

$$dF = \frac{1}{2}R^2 d\varphi - \frac{1}{2}r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\left(R^2 - r^2\right)d\varphi.$$

Общая площадь фигуры:

$$F = \int dF = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{1}{2}\left(R^2 - r^2\right)d\varphi = \frac{5\pi}{6}\left(R^2 - r^2\right).$$

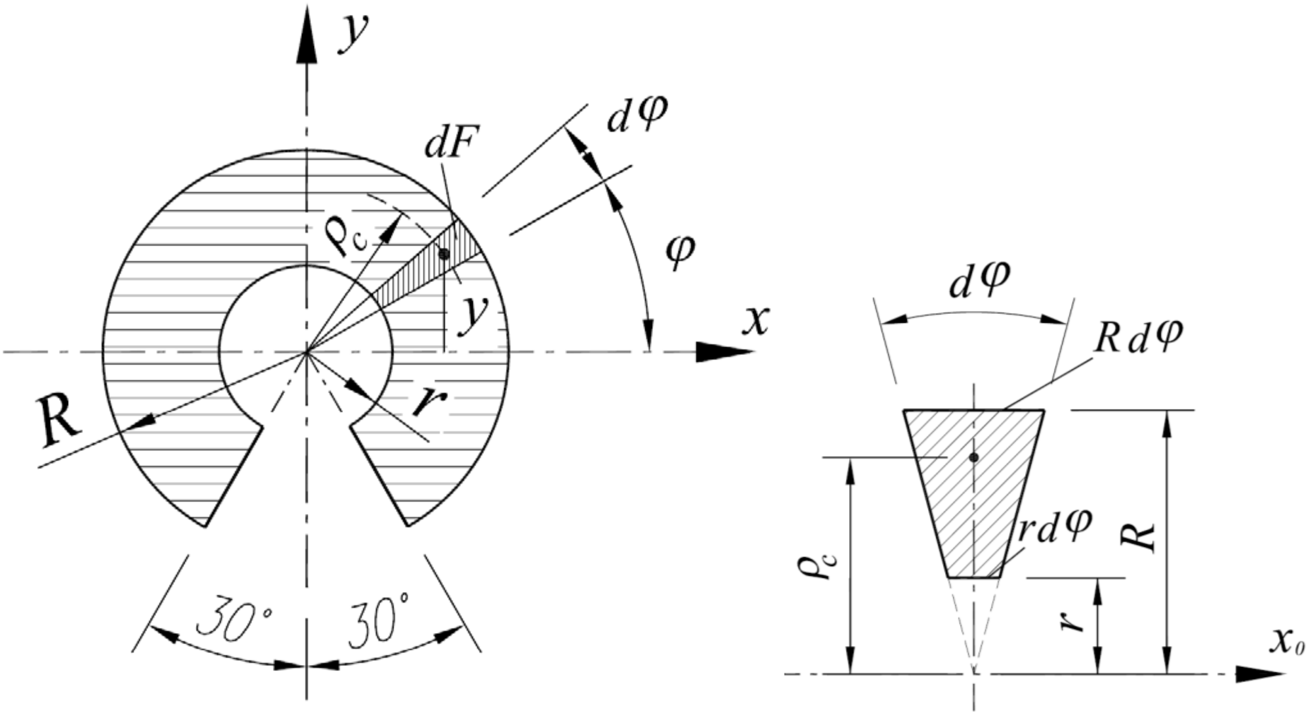


Рисунок 1

Центр тяжести выделенной элементарной площади dF найдем, заменяя дугу окружности в рамках сектора с углом $d\varphi$ хордой:

$$\rho_c = \frac{S_{x_0}}{dF} = \frac{\frac{1}{2}R^2 d\varphi \cdot \frac{2}{3}R - \frac{1}{2}r^2 d\varphi \cdot \frac{2}{3}r}{\frac{1}{2}\left(R^2 - r^2\right)d\varphi} = \frac{2}{3}\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

Координата *y* положения центра тяжести элементарной площадки:

$$y = \rho_c \sin\varphi = \frac{2}{3}\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\sin\varphi.$$

Статический момент площади фигуры:

$$S_x = \int\limits_F y dF = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2}{3}\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\sin\varphi \cdot \frac{1}{2}\left(R^2 - r^2\right)d\varphi = \frac{R^3 - r^3}{3}\left(-\cos\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\right) =$$

$$= \frac{R^3 - r^3}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{R^3 - r^3}{3}.$$

Координата центра тяжести фигуры y_c определится как:

$$y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{\frac{1}{3}\left(R^3 - r^3\right)}{\frac{5\pi}{6}\left(R^2 - r^2\right)} = \frac{2\left(R^2 + Rr + r^2\right)}{5\pi\left(R + r\right)}.$$

Для выполнения условия задачи используем условие $y_c = r$, получим

$$y_c = \frac{2\left(R^2 + Rr + r^2\right)}{5\pi\left(R + r\right)} = r;$$

$$2\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \left(2 - 5\pi\right)\frac{R}{r} + \left(2 - 5\pi\right) = 0;$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\left(5\pi - 2\right) \pm \sqrt{\left(2 - 5\pi\right)^2 - 8 \cdot \left(2 - 5\pi\right)}}{4} = \frac{\left(5\pi - 2\right)}{4}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{\left(5\pi - 2\right)}}\right).$$

Отрицательный корень смысла не имеет, следовательно, окончательно получим:

$$\frac{R}{r} = \frac{\left(5\pi - 2\right)}{4}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{\left(5\pi - 2\right)}}\right) \approx 7{,}736.$$

Ответ: $\frac{R}{r} = \frac{\left(5\pi - 2\right)}{4}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{\left(5\pi - 2\right)}}\right) \approx 7{,}736$.

Задача 2

Напряженное состояние в точке задано напряжениями:

$$\sigma_x = 40\,\text{МПа},\ \sigma_y = \sigma_z = 0,\ \tau_{xy} = 30\,\text{МПа},\ \tau_{xz} = 10\,\text{МПа},\ \tau_{yz} = 15\,\text{МПа}.$$

Определить расчетные напряжения в данной точке по третьей теории прочности.

Решение

Определим напряжения на главных площадках. Инварианты напряжений:

$$I_{1(T_\sigma)} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 40 \ \text{(МПа)};$$

$$I_{2(T_\sigma)} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 = -15^2 - 30^2 - 10^2 = -1225 \ \text{(МПа)}^2$$

$$I_{3(T_\sigma)} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = 2\cdot 30\cdot 15\cdot 10 - 40\cdot 15^2 = \\ = 9000 - 9000 = 0 .$$

Главные напряжения определяем из уравнения:

$$\sigma^3 - I_{1(T_\text{б})}\cdot\sigma^2 + I_{2(T_\text{б})}\cdot\sigma - I_{3(T_\text{б})} = 0 ;$$

$$\sigma_2 = 0 ;$$

$$\sigma^2 - 40\cdot\sigma - 1225 = 0 ;$$

$$\sigma_{1,3} = 20 \pm \sqrt{20^2 + 1225} ;$$

$$\sigma_1 = 20 + \sqrt{1625} = 20 + 40{,}31 = 60{,}31 \ \text{(МПа)};$$

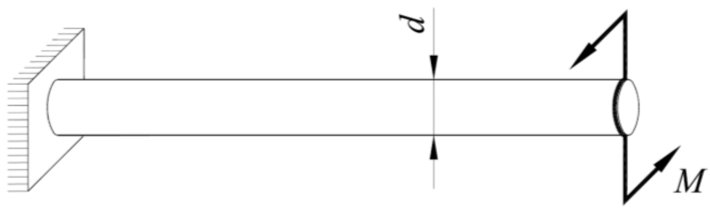
$$\sigma_3 = 20 - \sqrt{1625} = 20 - 40{,}31 = -20{,}31 \ \text{(МПа)};$$

Расчетные напряжения по III теории прочности напряжения определятся как:

$$\sigma_{расч}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = 60{,}31 + 20{,}31 = 80{,}62 \quad \text{(МПа)}.$$

Ответ: $\sigma_{расч}^{III} = 80{,}62$ (МПа).

Задача 3 (10 баллов)



Определить крутящий момент M при котором диаметр сечения сплошного вала d из условия прочности и жесткости будет одинаков. Определить при этом диаметр вала. Предельно допустимые напряжения $[\tau]$, предельно допустимый относительный угол закручивания $[\theta]$ и модуль сдвига G материала вала считать известными.

Решение

Требуемый диаметр вала из условия прочности $\tau \le [\tau]$:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi[\tau]}}$$

Требуемый диаметр вала из условия жесткости $\theta \le [\theta]$:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32M}{\pi G[\theta]}}.$$

Тогда по условию задачи:

$$\sqrt[3]{\frac{16M}{\pi[\tau]}} = \sqrt[4]{\frac{32M}{\pi[\theta]G}};$$

$$\left(\frac{16M}{\pi[\tau]}\right)^4 = \left(\frac{32M}{\pi[\theta]G}\right)^3;$$

$$\frac{2M}{\pi[\tau]^4} = \frac{1}{[\theta]^3 G^3};$$

$$M = \frac{\pi \cdot [\tau]^4}{2[\theta]^3 G^3}.$$

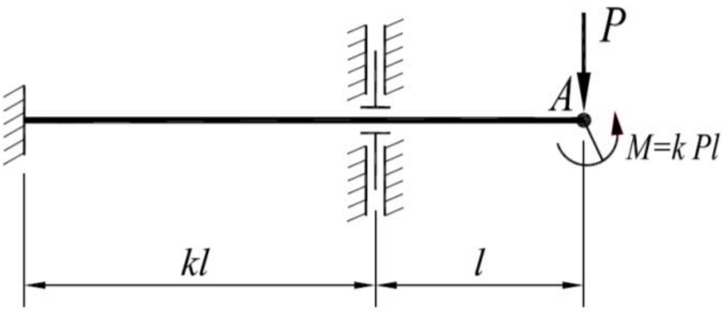
Диаметр найдем из любого условия, подставляя найденный крутящий момент

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot \pi \cdot [\tau]^4}{\pi[\tau] \cdot 2[\theta]^3 G^3}} = \frac{2[\tau]}{G[\theta]}.$$

Ответ: $M = \dfrac{\pi \cdot [\tau]^4}{2[\theta]^3 G^3}$; $d = \dfrac{2[\tau]}{G[\theta]}$.

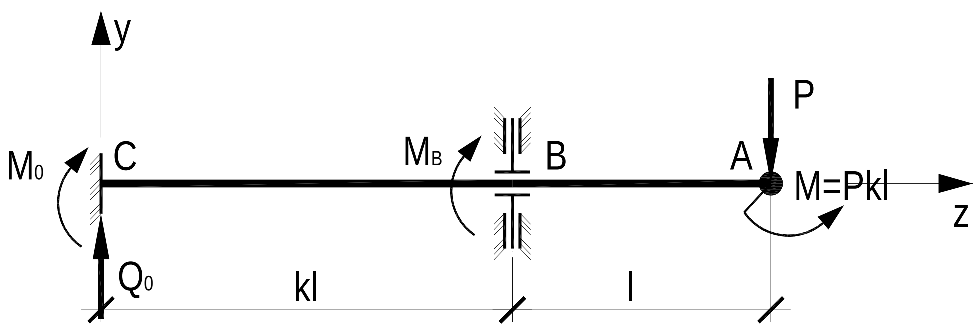
Задача 4 (10 баллов)

К балке постоянной жесткости в точке A приложены сосредоточенная сила P и сосредоточенный момент $M=k \cdot Pl$. Найти такой коэффициент k, при котором перемещение точки A вертикально вверх будет максимальным.



Решение

Балка один раз статически неопределима. Статическую неопределимость раскроем с помощью получения дополнительного уравнения, определяемого из граничного условия $\varphi_B = 0$. Используем метод начальных параметров. Начало координат выберем в точке C, начальные параметры: $EI\varphi_0 = 0$ и $EIv_0 = 0$.



$\sum Y = Q_0 - P = 0$, откуда $Q_0 = P$.

$$\sum M_C = M_0 + M_B + P \cdot (kl + l) - M = 0 \qquad (1)$$

$$EI\varphi_B = M_0 kl + Q_0 \cdot \frac{(kl)^2}{2} = M_0 kl + P \cdot \frac{(kl)^2}{2} = 0 \qquad (2)$$

Из (2): $M_0 = -\frac{Pkl}{2}$, тогда из (1): $M_B = Pl \cdot \left(\frac{k}{2} - 1\right)$.

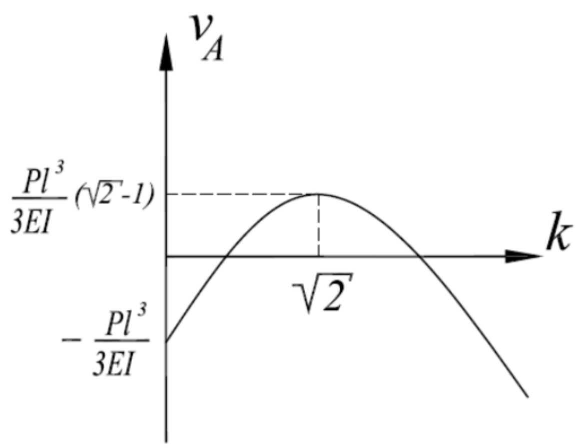
Вертикальное перемещение в точке *A*:

$$EIv_A = M_0 \cdot \frac{(kl + l)^2}{2} + Q_0 \cdot \frac{(kl + l)^3}{6} + \frac{M_B l^2}{2}$$
$$= -\frac{Pkl}{2} \cdot \frac{(kl + l)^2}{2} + P \cdot \frac{(kl + l)^3}{6} + Pl \cdot \left(\frac{k}{2} - 1\right) \cdot \frac{l^2}{2} =$$
$$= \frac{Pl^3}{12} \cdot (-k^3 - 4 + 6k).$$

Исследуем полученную функцию прогибов в области положительных значений параметра k ($k \geq 0$), при которых данная задача имеет физический смысл. Найдем экстремумы функции:

$$\frac{dv_A}{dk} = \frac{Pl^3}{12EI}(-3k^2 + 6) = 0;$$
$$k_1 = \sqrt{2}, \in [0, +\infty);$$
$$k_2 = -\sqrt{2}, \notin [0, +\infty);$$
$$\frac{d^2 v_A}{dk^2} = \frac{Pl^3}{12EI}(-6k) < 0, \text{при } k \geq 0.$$

Тогда $k \quad = \sqrt{2} -$ точка максимума фукции.



Таким образом, функция $v_A(k)$ в области положительных значений аргумента выпукла вверх и имеет один экстремум – локальный максимум, величина котрого:

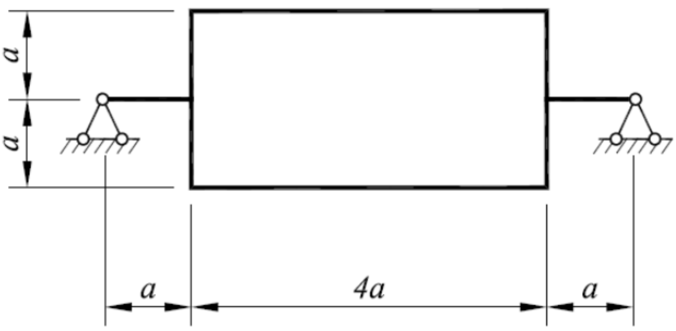
$$v_A(k = \sqrt{2}) = \frac{Pl^3}{3EI} \cdot (\sqrt{2} - 1) > 0.$$

Следовательно, максимальное перемещение вверх точки *A* происходит при значении коэффициента $k \quad = \sqrt{2}$.

Ответ: $k \quad = \sqrt{2}$.

Задача 5 (10 баллов)

Стальная рама из стержней одинакового поперечного сечения подвержена равномерному нагреву на ΔT градусов. Определить максимальный изгибающий момент в стержнях рамы, если известно: a=2м, ΔT=20^{0}С, α=1,1·10^{-5}1/^{0}С, E=2,06·10^{11}Па, F=10см^2.



Решение

Заданная рама статически неопределима. Для определения опорных реакций используем условие симметрии рамы. Возникающие реакции в опорах должны быть симметричны.

Из условия равновесия:

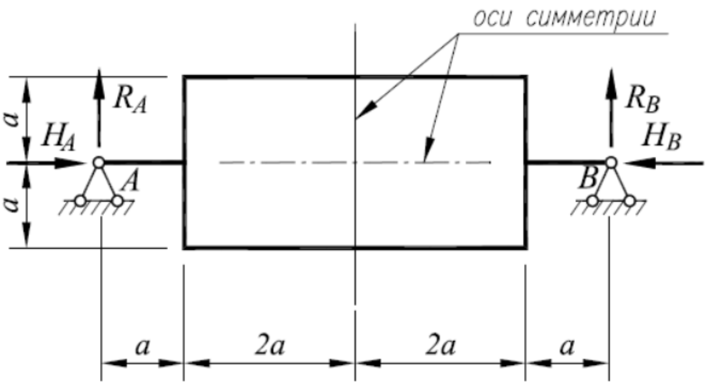
$\sum Y = R_A + R_B = 0,$

$\sum X = H_A - H_B = 0,$

тогда из условия симметрии:

$R_A = R_B = 0.$

$H_A = H_B = H.$

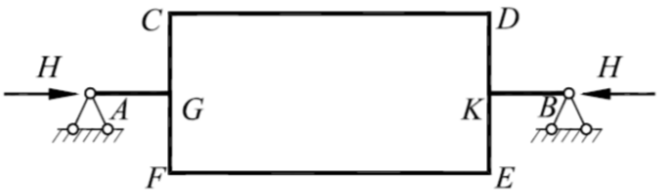


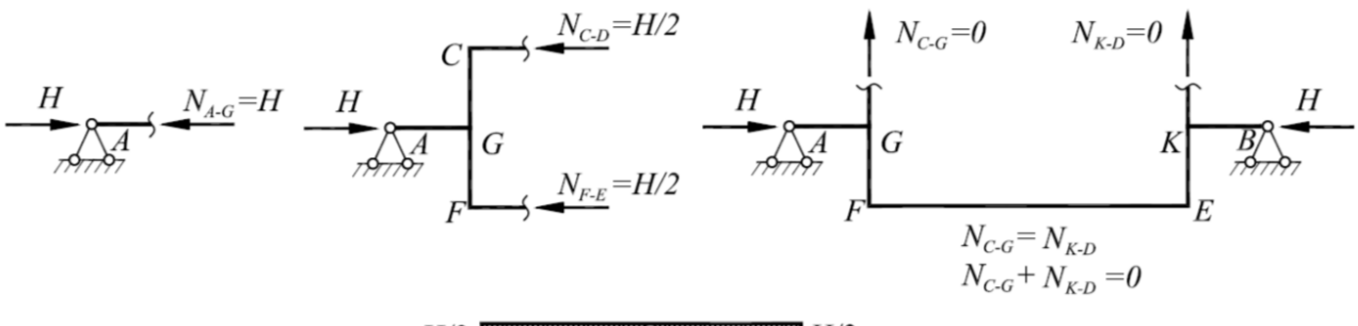
Поскольку опоры рамы неподвижны, горизонтальную реакцию H найдем из равенства температурных деформаций рамы в горизонтальном направлении и механических деформаций под действием возникших опорных реакций.

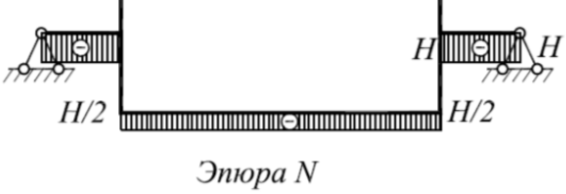
Свободные температурные деформации рамы в горизонтальном направлении:

$$\Delta l^t = \alpha \cdot 6a \cdot \Delta T. \qquad (1)$$

Для определения механических деформаций построим эпюру продольных сил в стержнях рамы.







Эпюра N

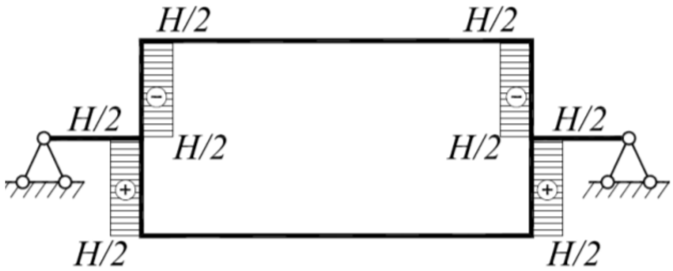
Суммарные механические деформации стержней рамы в горизонтальном направлении:

$$\Delta l^H = 2\frac{Ha}{EF} + \frac{(H/2)4a}{EF} = 4\frac{Ha}{EF}. \qquad (2)$$

Горизонтальная реакция H определиться из равенства выражений (1) и (2):

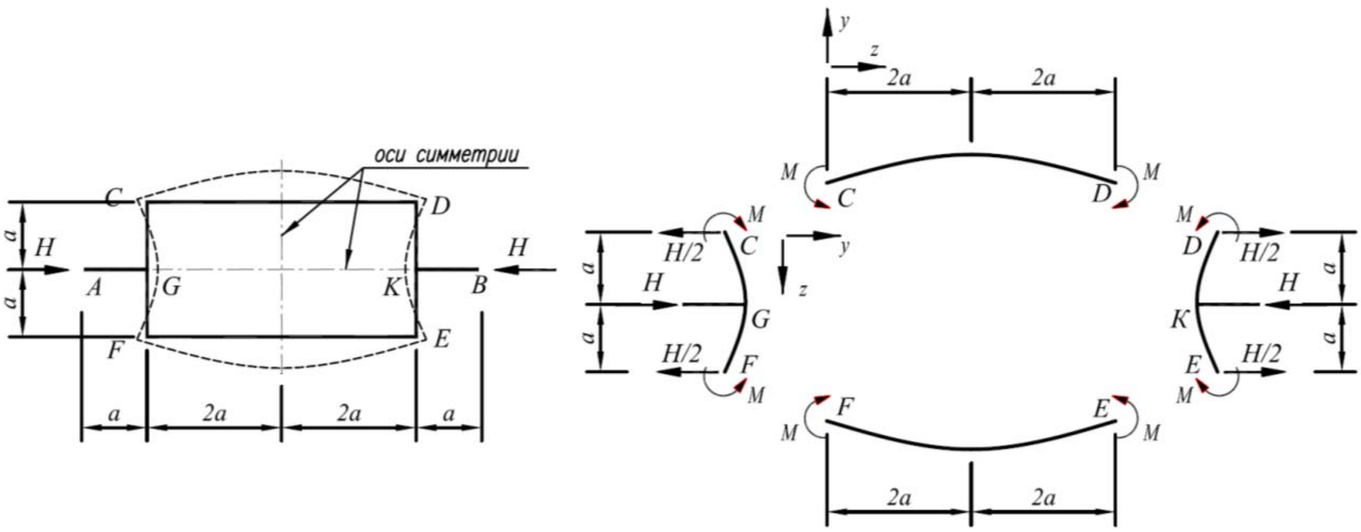
$$\Delta l^t = \Delta l^H;$$
$$\alpha \cdot 6a \cdot \Delta T = 4\frac{Ha}{EF};$$
$$H = 1{,}5\alpha\Delta TEF.$$

Используя эпюру продольных сил, строим эпюру поперечных сил Q.



Эпюра Q

Для построения эпюры моментов используем условие симметрии системы в деформированном состоянии – угол поворота поперечных сечений элементов рамы на осях симметрии равен нулю. Рассечем раму в узлах и составим уравнения углов поворота для серединных сечений стержней C-D и C-F, задавшись для них системами координат с началом в точке C.



Для стержня C-D:

$$\varphi(z) = \varphi_0 - \frac{Mz}{EI},$$
$$\varphi(z = 2a) = \varphi_0 - \frac{2Ma}{EI} = 0. \qquad (3)$$

Для стержня C-F:

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \frac{Mz}{EI} - \frac{\left(\frac{H}{2}\right)z^2}{2EI}, \text{при } z \in [0, a]$$
$$\varphi(z = a) = \varphi_0 + \frac{Ma}{EI} - \frac{\left(\frac{H}{2}\right)a^2}{2EI} = 0. \qquad (4)$$

Из совместного решения (3) и (4) получим:

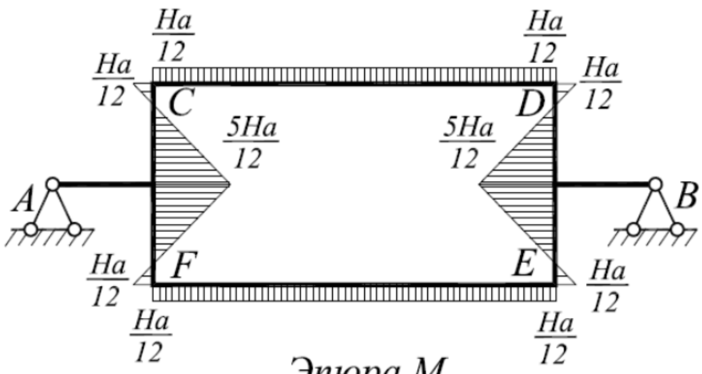
$$M = \frac{Ha}{12}.$$

Используя полученное значение момента, а также ранее построенные эпюры строим эпюру изгибающих моментов.

$$M_{max} = \frac{5}{12}Ha = \frac{5}{8}\alpha\Delta TEFa =$$

$= \frac{5}{8} \cdot 1{,}1{\cdot}10^{-5} \cdot 20 \cdot 2{,}06 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 5{,}665 \cdot 10^{4}(\text{Нм}) = 56{,}65\text{кНм}.$

Ответ: $M_{max} = 56{,}65$кНм.



Эпюра M