МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Задания и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ

МАКЕЕВКА – 2011

к оглавлению

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ

Кафедра «Теоретической и прикладной механики»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Задания и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ

Утверждено
на учебно-методическом совете
Протокол № 29
от 30.05.2011 г.

Рассмотрено и утверждено
на заседании кафедры
«Теоретической и прикладной
механики»
Протокол № 3 от 31.03.2011 г.

г. Макеевка-2011

к оглавлению

УДК 378.14

Теоретическая механика. Кинематика точки и твердого тела. Задания и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ// Мущанов В.Ф., Стифеев Ф.Ф., Лукьянец А.Г., Фоменко С.А. - Макеевка: ДонНАСА, 2011, - 70 стр.

Задания и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ по кинематике предназначены для студентов всех специальностей, обучающихся в строительных институтах III – IV уровня аккредитации. В настоящем пособии предложены четыре контрольных задания по темам:

1) Задание К1. Кинематика точки. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения.
2) Задание К2. Простейшие движения твердого тела. Определение скоростей и ускорения точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях.
3) Задание К3. Плоское движение твердого тела.
4) Задание К4. Сложное движение точки.

Задания, краткие теоретические сведения и методические указания предназначены как при подготовке к модульному контролю студентов стационара, так и в учебном процессе для студентов заочного факультета.

Составители: В.Ф. Мущанов, профессор, д.т.н.,
Ф.Ф. Стифеев, доцент, к.т.н.,
А.Г. Лукьянец, ассистент
С.А. Фоменко, ассистент

Отв. за выпуск Ф.Ф.Стифеев, доцент, к.т.н.

Рецензенты: В.М. Левин, профессор, д.т.н.,
В.Т. Горлышкин, доцент, к.т.н.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Задания и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ

Составители: В.Ф. Мущанов, д.т.н., профессор,
Ф.Ф. Стифеев, к.т.н., доцент,
А.Г. Лукьянец, ассистент
С.А. Фоменко, ассистент

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение в кинематику

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел без учета их инертности и действующих на них сил.

Движение в механике – это изменение с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам.

Для определения положения движущегося тела (или точки) с тем телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают систему координат, которая вместе с телом образует *систему отсчета.*

Движение тел в пространстве совершается с течением времени. Пространство рассматривается как трехмерное, время считается универсальным, т.е. протекающим одинаково во всех рассматриваемых системах отсчета.

За единицу длины при измерении расстояний принимается один метр.

За единицу времени принимается одна секунда.

Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах кинематики время t принимают за независимую переменную (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т.д.) рассматривают как изменяющиеся с течением времени, т.е. как функции времени t. Отсчет времени ведется от некоторого *начального момента* ($t = 0$), выбор которого устанавливается в каждом конкретном случае. Всякий данный *момент времени* t определяется числом секунд, прошедших от начального момента да данного; разность между какими-нибудь двумя последовательными моментами времени называется *промежутком времени.*

Для решения задач кинематики необходимо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано).

Кинематически задать движение или закон движения тела (точки) значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени. Установление математических способов задания движения точек или тел является одной из важных задач кинематики.

Основная же задача кинематики твердого тела или точки состоит в том, чтобы, зная закон движения данного тела или точки, определить все кинематические величины, характеризующие как движение тела в целом, так и движение каждой из его точек в отдельности (траектории, скорости, ускорения и т.д.).

2. Входная информация

Приступая к решению задач кинематики, студентам необходимо восстановить в памяти (или восполнить) знания из прошлых периодов обучения:

2.1. Из курса средней школы:

- теорема Пифагора: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, т.е. (рис. 2.1):

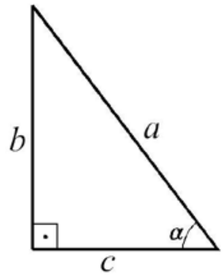


Рис. 2.1

$a^2 = b^2 + c^2$

Катеты равны:

$c = a \cdot \cos\alpha$ и $b = a \cdot \sin\alpha$.

Отношение катетов:

$\frac{b}{c} = tg\alpha$.

- теорема синусов (рис. 2.2): отношения сторон треугольника равно отношению синусов их противолежащих углов:

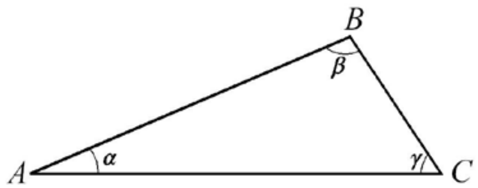


Рис. 2.2

$AB : BC : AC = \sin\gamma : \sin\alpha : \sin\beta$,

или $\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta}$.

- теорема косинусов (рис. 2.2): сторона треугольника равна корню квадратному из суммы квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними. Например:

$AB = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\gamma}$, или

$BC = \sqrt{(AB)^2 + (AC)^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\alpha}$, или

$AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\beta}$.

- углы в круге: длина окружности и дуги (рис. 2.3). Длина окружности L радиуса R равна

$L = 2\pi R$,

где $\pi = 3{,}14$, *рад*.

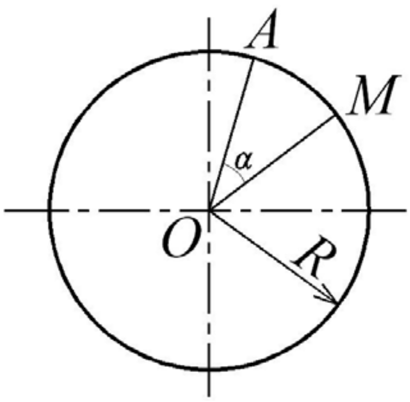


Рис. 2.3

Длина дуги AM равна:

$S = \overset{\cup}{AM} = \alpha \cdot R,$

где α - центральный угол AOM (измеряется в радианах!).

Зная длину дуги $\overset{\cup}{AM}$ найдем центральный угол:

$\alpha = \dfrac{\overset{\cup}{AM}}{R}.$

- радианное измерение углов:

1 радиан соответствует $\dfrac{180^\circ}{\pi}$.

- тригонометрические функции острого угла (табл. 2.1):

Таблица 2.1

α	***sin α***	***cos α***	***tg α***	***ctg α***	***sc α***	***csc α***
0°	0	1	0	∞	1	∞
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	2	$2/\sqrt{3}$
90°	1	0	∞	0	∞	1

- соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \ tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1;$

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \ ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+tg^2\alpha} = \dfrac{ctg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha};$

$\sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+ctg^2\alpha} = \dfrac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}.$

- формулы приведения (табл. 2.2):

Таблица 2.2

Функция	**Углы**								
	-α	**90°-α**	**90°+α**	**180°-α**	**180°+α**	**270°-α**	**270°+α**	**360°-α**	**360°+α**
sin	-*sin* α	+*cos* α	+*cos* α	+*sin* α	-*sin* α	-*cos* α	-*cos* α	-*sin* α	+*sin* α
cos	+*cos* α	+*sin* α	-*sin* α	-*cos* α	-*cos* α	-*sin* α	+*sin* α	+*cos* α	+*cos* α
tg	-*tg* α	+*ctg* α	-*ctg* α	-*tg* α	+*tg* α	+*ctg* α	-*ctg* α	-*tg* α	+*tg* α
ctg	-*ctg* α	+*tg* α	-*tg* α	-*ctg* α	+*ctg* α	+*tg* α	-*tg* α	-*ctg* α	+*ctg* α

- формулы сложения и вычитания:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta};$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

- формулы двойных, тройных и половинных углов:

$$\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta;$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}; \qquad ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha};$$

$$\sin 3\alpha=3\cdot\sin\alpha-4\cdot\sin^3\alpha; \qquad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}; \qquad ctg3\alpha=\frac{ctg^3\alpha-3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha-1};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Знаки перед радикалами берутся в соответствии с тем, в каком квадранте лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

- простейшие функции и их графики:

а) *линейная функция*. Если переменные величины x и y связаны уравнением первой степени $ax + by = c$, то график функциональной зависимости есть прямая линия (если $c = 0$, прямая проходит через начало координат).

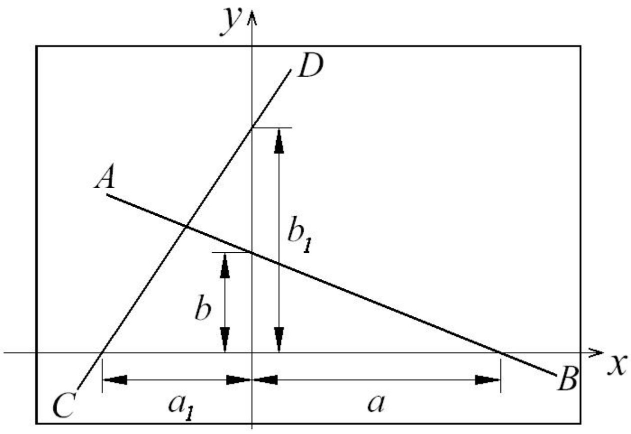


Рис. 2.4

Примеры: график уравнения $2x + 5y = 10$ есть прямая АВ (рис. 2.4); коэффициенты равны: $a = \frac{10}{2} = 5, b = \frac{10}{5} = 2.$ График уравнения $2y - 3x = 9$ есть прямая CD. Здесь $a_1 = \frac{9}{-3} = -3$ *и* $b_1 = \frac{9}{2} = 4{,}5.$

График уравнения $x = a_3$ есть прямая линия, параллельная оси ординат (оси Х).

б) *обратная пропорциональность*. Если переменные x и y обратно пропорциональны, то функциональная зависимость между ними выражается уравнением $y = \frac{c}{x}$, где c есть некоторая постоянная величина. График обратной пропорциональности есть кривая линия, которая называется *гиперболой.*

в) *квадратичная функция.* Функция

$$y = ax^2 + bx + c,$$

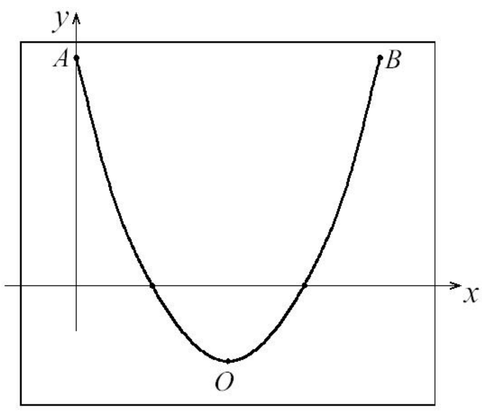


Рис. 2.5

(a,b,c - постоянные величины; $a \neq 0$) называется *квадратичной*. В простейшем случае $y = ax^2$ ($b = c = 0$) график есть кривая линия, проходящая через начало координат. График квадратичной функции есть *парабола.*

Пример: График функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$

($a=\frac{1}{2}$; $b=-4$; $c=6$) является (рис. 2.5) *параболой АОВ*. Вершина лежит в т.О (4; -2).

г) *степенная функция*. Функция $y=ax^n$ (a и n - постоянные величины) называется *степенной*. При четном n график симметричен относительно оси ординат; при нечетном – относительно начала координат. График всех степенных функций $y=ax^n$ при положительном n называются *параболами n-ого порядка* (или n-ой степени).

д) *показательная функция*. Функция $y=a^x$, где a – постоянное положительное число, называется *показательной*. Аргумент x может принимать любые действительные значения. Значения функции $y=a^x$ берутся только положительные. График показательной функции – кривая линия, неограниченно приближающаяся к оси абсцисс, но ее не достигающая.

е) *логарифмическая функция.* Функция $y=\log_a x$, где a - постоянное, не равное 1, число, называется *логарифмической*. *Логарифмическая* функция обратна *показательной*. График ее получается из графика показательной функции (при том же основании) перегибом чертежа по биссектрисе первого координатного угла. Так же получается график любой обратной функции.

ж) *тригонометрическая функция*. Отношения различных пар сторон прямоугольного треугольника называются *тригонометрическими функциями* его острого угла. По отношению к углу эти функции получают следующие названия и обозначения (рис. 2.1):

1) *Синус*: $\sin\alpha=\frac{b}{a}$ (*отношение противолежащего катета к гипотенузе*);

2) *Косинус*: $\cos\alpha=\frac{c}{a}$ (*отношение прилежащего катета к гипотенузе*);

3) *Тангенс*: $tg\alpha=\frac{b}{c}$ (*отношение противолежащего катета к прилежащему*);

4) *Котангенс*: $ctg\alpha=\frac{c}{b}$ (*отношение прилежащего катета к противолежащему*).

Линия, являющаяся графиком функции $y=\sin x$, называется *синусоидой*. График функции $y=\cos x$ тоже *синусоида*; она получается из графика $y=\sin x$ смещением вдоль оси абсцисс влево на отрезок $\frac{\pi}{2}$. Синусоида является функцией *<u>периодической</u>*. Все тригонометрические функции имеют период 2π (π измеряется в радианах!).

Функции $y = tgx$ и $y = ctgx$ имеют, сверх того, период π. График этих функций – кривые линии.

ж) *<u>окружность</u>*. Окружность радиуса R с центром в начале координат представляется уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Окружность радиуса R с центром в т.С ($a;b$) представляется уравнением

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Окружность есть *<u>линия второго порядка</u>*, т.к. представляется *<u>уравнением второй степени</u>*.

з) *<u>эллипс</u>*. Каноническое* уравнение эллипса представляется уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b - полуоси эллипса.

Различают *<u>большую</u>* и *<u>малую оси</u>* эллипса. Принимая $a > b$, отношение $k = b : a$ называется *<u>коэффициентом сжатия</u>* эллипса. Величина $1 - k = \frac{a-b}{a}$ называется *<u>сжатием</u>* эллипса.

Эллипс симметричен относительно большой и малой осей, а значит, и относительно центра.

Уравнение эллипса, оси симметрии которого не проходят через начало координат, имеет вид:

$$\frac{(x^2 \pm c^2)}{a^2} + \frac{(y^2 \pm d^2)}{b^2} = 1,$$

где c и d постоянные величины, не равные нулю.

2.2. Из курса высшей математики:

---

* - от греческого слова “канон” – образец. Таким образом, название “каноническое” равнозначно названию “типовое”.

2.2.1. *<u>Векторной величиной</u>* или *<u>вектором</u>* (в широком смысле), называется всякая величина, обладающая *<u>направлением</u>*.

<u>Скалярной величиной</u>, или *<u>скаляром</u>*, называется величина, не обладающая направлением.

В *кинематике* векторными величинами являются: скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ материальной точки или точки твердого тела; угловая скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ твердого тела. Скаляры – время t, координаты точки x и y, угловая скорость ω_{OA} и угловое ускорение ε_{OA} звена плоского механизма (задание К-3), параметры φ_e и $S_r = \overset{\cup}{OM}$ (задание К-4).

2.2.2. Сложение двух векторов. Геометрическая сумма $\vec{V}$ двух векторов $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ находится по правилу параллелограмма (рис. 2.6):

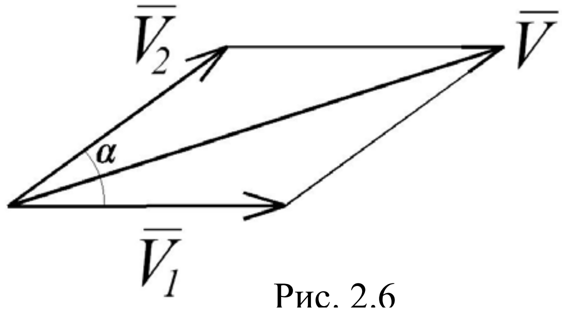


Рис. 2.6

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2.$$

Модуль вектора V равен:

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha}.$$

Сложение трех и более векторов производится последовательным их сложением по правилу параллелограмма.

2.2.3. Вычитание двух векторов (рис. 2.7).

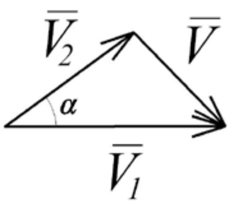


Рис. 2.7

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}.$$

Модуль вектора $\vec{V}$ равен:

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2 \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot \cos\alpha}.$$

2.2.4. *<u>Проекция вектора на ось</u>*. *<u>Осью</u>* называется всякая прямая, на которой выделено одно их двух ее направлений (все равно какое). Это направление называется *<u>положительным</u>* (на чертеже оно обозначается стрелкой); противоположное направление – отрицательное.

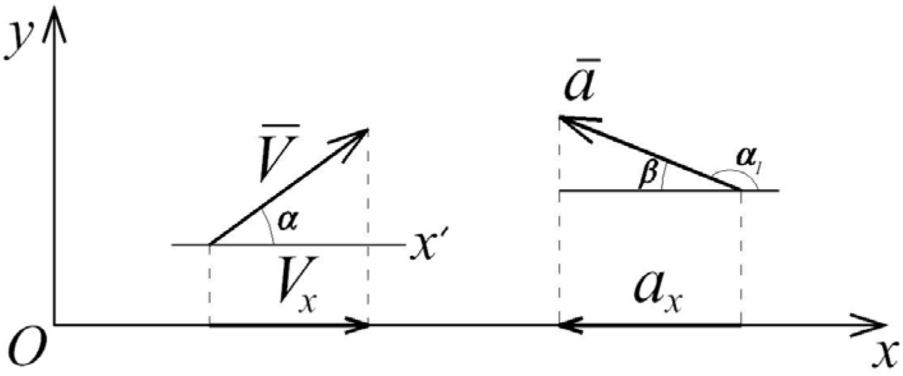


Рис. 2.8

<u>*Проекция точки на ось*</u> есть основание перпендикуляра, проведенного из данной точки на данную ось.

<u>*Проекцией вектора на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца вектора*</u>. Проекция вектора имеет знак «плюс», если перемещение от ее начала к концу происходит в положительном направлении оси, и знак «минус» - если в отрицательном. Из определения следует, что проекция данного вектора на любые параллельные и одинаково направленные оси равны друг другу. Этим удобно пользоваться при вычислении проекции вектора на ось, не лежащую в одной плоскости с данным вектором.

Обозначать проекцию вектора $\vec{V}$ на ось Ox будем символом V_x. Тогда для векторов $\vec{V}$ и $\vec{a}$, изображенных на рис. 2.8, получим:

$$V_x = V\cos\alpha,\ a_x = -a\cos\beta = a\cos\alpha_1.$$

Таким образом, <u>*проекция вектора на ось равна произведению его модуля на косинус угла между направлением вектора и положительным направлением оси*</u>. При этом проекция будет положительной, если угол между направлением вектора и положительным направлением оси – острый, и отрицательной, если этот угол – тупой; <u>*если вектор перпендикулярен к оси, то его проекция на эту ось равна нулю*</u>.

2.2.5. Производные некоторых функций.

а) производная постоянной величины равна нулю. Например: $c = const$, $(c)' = 0$ или $\dfrac{dc}{dt} = 0$;

б) производная независимой переменной равна единице:

$(t)' = 1$ или $\frac{dt}{dt} = 1;$

в) производная линейной функции $y = at + b$ есть постоянная величина a:

$\frac{dy}{dt} = a\frac{dt}{dt} + \frac{db}{dt} = a;$

г) производная степенной функции равна произведению показателя степени на степенную функцию, у которой показатель на единицу меньше:

$$(X^n)' = nX^{n-1} \text{ или, например, } (t^3)' = 3t^2.$$

$$\text{или } (ax^2 + b)' = 2ax.$$

2.2.6. Натуральные логарифмы.

Формула дифференцирования логарифмической функции имеет простейший вид, когда основанием служит число

$$e = \lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x \approx 2{,}71828.$$

Производная натурального логарифма:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

2.2.7. Дифференцирование показательной функции.

Производная показательной функции e^x (где $e \approx 2{,}71828$) равна:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x,$$

т.е. производная функции e^x равна самой функции.

Примеры: $\frac{d}{dx}(e^{3x}) = 3e^{3x};$

$\frac{d}{dx}(e^{-2x}) = -2e^{-2x}.$

2.2.8. Дифференцирование тригонометрических функций.

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x,$

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x,$

$$\frac{d}{dx}(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{d}{dx}(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Примеры: $\frac{d}{dx}(\sin\frac{\pi x}{3}) = \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi x}{3}$;

$$\frac{d}{dx}(\cos\frac{\pi x}{6}) = -\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi x}{6};$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^2\frac{\pi x}{4}) = 2\sin\frac{\pi x}{4}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi x}{2};$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^2\frac{2\pi x}{3}) = 2\cos\frac{2\pi x}{3}\cdot(-\sin\frac{2\pi x}{3})\cdot\frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\frac{4\pi x}{3}.$$

3. Теоретические основы для решения задания К1 «Кинематика точки».

3.1. В задании К1 уравнения движения материальной точки представлены в координатной форме:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}$$

где координаты x и y движущейся точки являются функциями времени t.

Точка движется в плоскости XY.

Для нахождения положения точки (координаты $x_1; y_1$) в заданный момент времени t_1 необходимо в уравнения движения подставить время t_1. Например:

$$x_1 = x(t_1) \text{ и } y_1 = y(t_1).$$

Координаты точки в начальный момент времени ($t = t_0 = 0$):

$$x_0 = x(t_0) \text{ и } y_0 = y(t_0).$$

3.2. Уравнения движения точки также являются уравнениями ее траектории в параметрической форме, причем в качестве параметра выступает время t. Чтобы найти уравнение траектории точки в координатной форме (в виде $x = f(y)$ или $y = f(x)$) необходимо из уравнений движения исключить время t. Таким образом, из двух уравнений движения получим одно уравнение траектории в координатной форме.

3.3 Модуль вектора скорости точки определяют по формуле:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2},$$

где V_x и V_y проекции вектора скорости на оси X и Y соответственно. Эти проекции равны:

$$V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{и} \quad V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}.$$

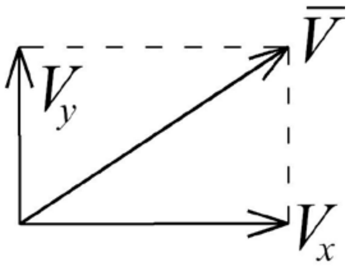


Рис. 3.1

Проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным по времени от соответствующего уравнения движения. Направление вектора скорости определяем по правилу параллелограмма (рис. 3.1). Здесь

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

3.4. Модуль ускорения точки равен:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

где a_x и a_y проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на оси X и Y соответственно. Эти проекции:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{и} \quad a_y = \ddot{y} = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

При этом, если, например, проекция скорости точки на ось X есть величина постоянная, то проекция ускорения точки на эту ось равна нулю, т.е.:

если $V_x = c$, то $a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{dc}{dt} = 0.$

Вектор $\vec{a}$ строится аналогично построения вектора $\vec{V}$.

3.5. Касательное ускорение точки (характеризует изменение вектора скорости по величине) найдем по формуле:

$$a_\tau = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{V}.$$

Если векторы скорости $\vec{V}$ и касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ направлены в одну сторону, то движение точки – ускоренное, если в противоположные стороны - точка движется замедленно. Если скорость точки $V = const$, то $a_\tau = 0$.

3.6. Нормальное ускорение точки (характеризует изменение вектора скорости по направлению) определим из формулы:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Нормальное ускорение направлено к центру кривизны траектории точки в данный момент времени и всегда перпендикулярно ускорению касательному.

Радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

4. Пример 1.

Даны уравнения движения точки М:

$$x = 3\sin t^2, \qquad y = t^2 - 1,$$

(x и y – в метрах, t – в секундах). Определить уравнение траектории, начальное положение точки (при $t_0 = 0$) и для момента времени $t_1 = 2$с:

а) положение точки;

б) скорость точки;

в) касательное, нормальное и полное её ускорения;

г) радиус кривизны траектории.

Векторы $\vec{V}$ и $\vec{a}$ показать на рисунке.

Решение.

1. Движение точки задано координатным способом. Для определения траектории из заданных уравнений движения исключаем t. Из второго уравнения:

$$t^2 = y + 1.$$

Подставим это значение в первое уравнение:

$$x = 3\sin(y + 1).$$

Таким образом, траекторией движения точки является синусоида, изображенная на рис. 4.1.

2. Начальное положение точки (M_0):

$$x_0 = 3\sin t_0^2 = 3 \cdot \sin 0 = 0, \text{ м};$$

$y_0 = t_0^2 - 1 = 0 - 1 = -1,$ м.

3. Положение точки при $t = t_1 = 2$с (M_1):

$x_1 = 3\sin t_1^2 = 3 \cdot \sin 2^2 = 3\sin 4 = 3\sin(\pi + 0{,}86) = -3\sin 0{,}86 = -2{,}3$ м;

$y_1 = t_1^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$ м.

Точки M_0 и M_1 показаны на рис. 4.1.

4. Определим скорость точки M_1:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2},$$

где проекции скорости точки на оси координат равны:

$V_x = \dfrac{dx}{dt} = 3\cos t^2 \cdot 2t = 6t\cos t^2,$ м/с;

$V_y = \dfrac{dy}{dt} = 2t,$ м/с.

При $t = t_1$ проекции скорости равны:

$V_x = 6t_1 \cdot \cos t_1^2 = 6 \cdot 2 \cdot \cos 2^2 = -7{,}8$ м/с;

$V_y = 2t_1 = 2 \cdot 2 = 4$ м/с.

Скорость т. M_1 равна:

$V_1 = \sqrt{(-7{,}8)^2 + 4^2} \approx 8{,}8$ м/с;

Проекции V_x, V_y и вектор $\vec{V}_1$ показаны на рис. 4.2.

5. Найдем ускорение точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Проекции ускорения точки на оси координат равна:

$a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = 6\cos t^2 - 6t \cdot \sin t^2 \cdot 2t = 6\cos t^2 - 12t^2 \sin t^2,$ м/с^2;

$a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = 2$ м/с^2.

При $t = t_1$ эти проекции равны:

$a_x = 6\cos t_1^2 - 12t_1^2 \sin t_1^2 = 6\cos 2^2 - 12 \cdot 2^2 \sin 2^2 \approx 32{,}6$ м/с^2;

$a_y = const = 2$ м/с^2.

Ускорение точки при $t = t_1$:

$a_1 = \sqrt{32{,}6^2 + 2^2} \approx 32{,}7$ м/с^2.

Проекции V_x, V_y и вектор $\vec{V_1}$ показаны на рис. 4.2.

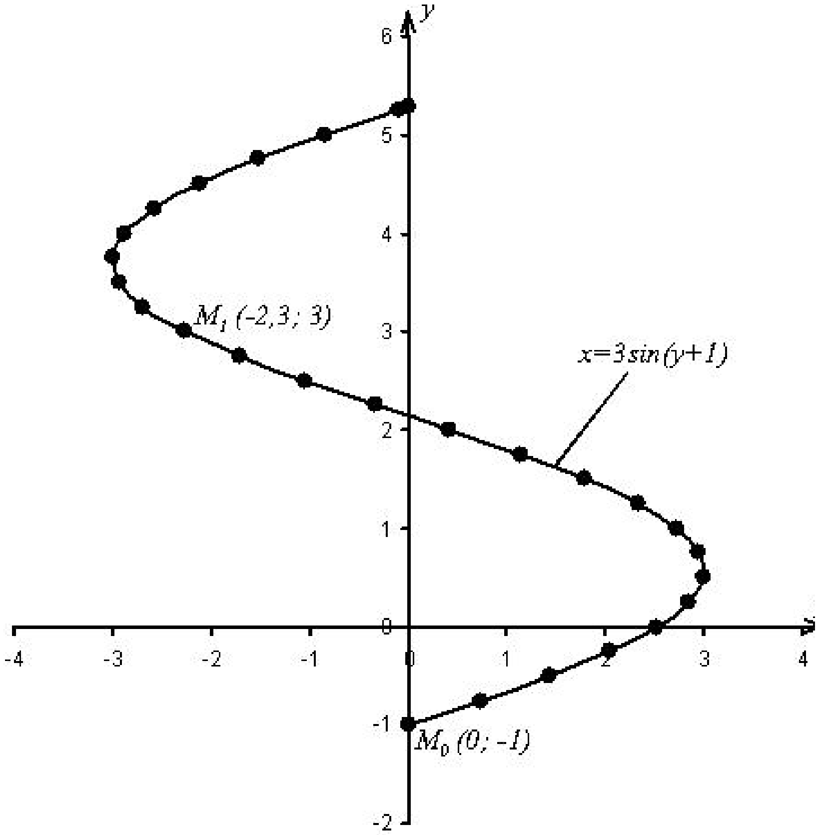


Рис. 4.1.

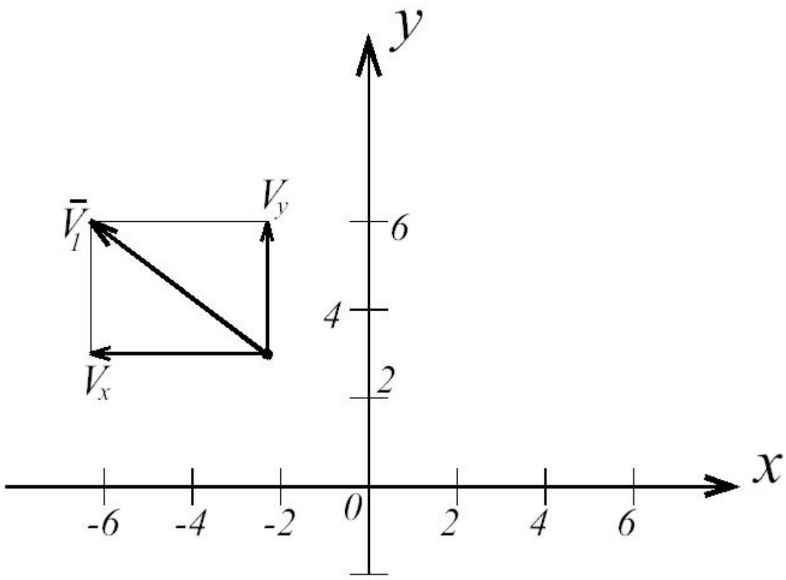


Рис. 4.2

6. Вычислим касательное ускорение точки:

$$a_\tau = \left|\frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{V}\right| = \left|\frac{(-7{,}8)\cdot 32{,}6 + 4\cdot 2}{8{,}8}\right| \approx 28 \text{ м/с}^2.$$

7. Нормальное ускорение точки равно:

$$a_n = \sqrt{a_1^2 - a_\tau^2} = \sqrt{(32{,}7)^2 - 28^2} \approx 16{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ показаны на рис. 4.3.

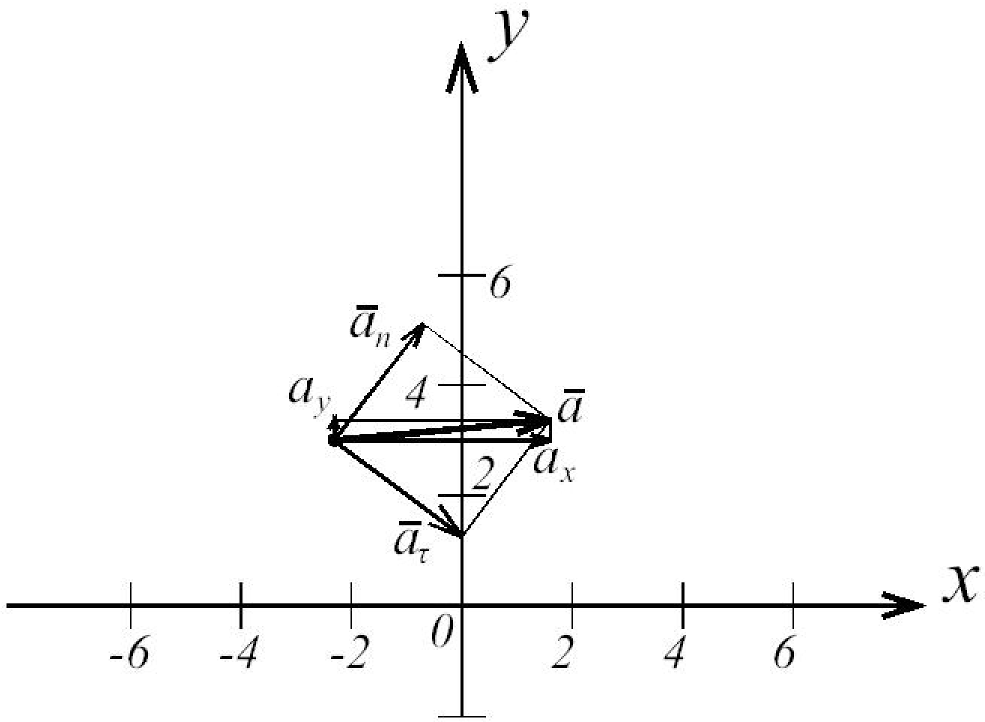


Рис. 4.3

8. Определим значение радиуса кривизны траектории в положении M_1:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{(8{,}8)^2}{16{,}9} = 4{,}58 \text{ м.}$$

Ответ: 1) $x = 3\sin(y+1)$, м; 2) $x_0 = 0$ и $y_0 = -1$, м;

3) $x_1 = -2{,}3$ м и $y_1 = 3$ м; 4) $V_1 = 8{,}8$ м/с;

5) $a_1 = 32{,}7$ м/с^2, $a_\tau = 28$ м/с^2, $a_n = 16{,}9$ м/с^2;

6) $\rho = 4{,}58$ м.

5. Пример 2.

Движение точки M в плоскости xOy задано уравнениями

$$x = 6e^{3t} + 1 \quad (1) \quad \text{и} \qquad y = 3e^{3t} - 2 \quad (2),$$

где x и y измеряются в метрах, а t – в секундах.

а) Найти уравнение траектории т. M;

б) построить график траектории и показать положение точки в начальный момент времени ($t_0 = 0$) и в момент времени $t_1 = 1$с;

в) для заданного момента времени $t_1 = 1$с определить скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории;

г) векторы скорости и ускорений показать на рисунке.

Решение.

1. Определим уравнение траектории движения точки M в координатной форме. Из уравнения движения (1):

$$e^{3t} = \frac{x-1}{6}.$$

Подставим это значение в уравнение (2):

$$y = 3\left(\frac{x-1}{6}\right) - 2 = 0{,}5x - 2{,}5, \text{ м.}$$

Таким образом установили, что траектория движения точки – прямая линия, уравнение которой

$$y = 0{,}5x - 2{,}5, \text{ м.}$$

2. Найдем начальное положение точки M и её координаты в заданный момент времени:

$$x_0 = 6e^{3t_0} + 1 = 6e^{3\cdot 0} + 1 = 7 \text{ м};$$

$$y_0 = 3e^{3t_0} - 2 = 3e^{3\cdot 0} - 2 = 1 \text{ м}.$$

При $t = t_1 = 1$с:

$$x_1 = 6e^{3\cdot 1} + 1 = 122 \text{ м};$$

$$y_1 = 3e^{3\cdot 1} - 2 = 58 \text{ м}.$$

График траектории, а также начальное M_0 положение точки и её положение M_1 при $t = t_1$, показаны на рис. 5.1.

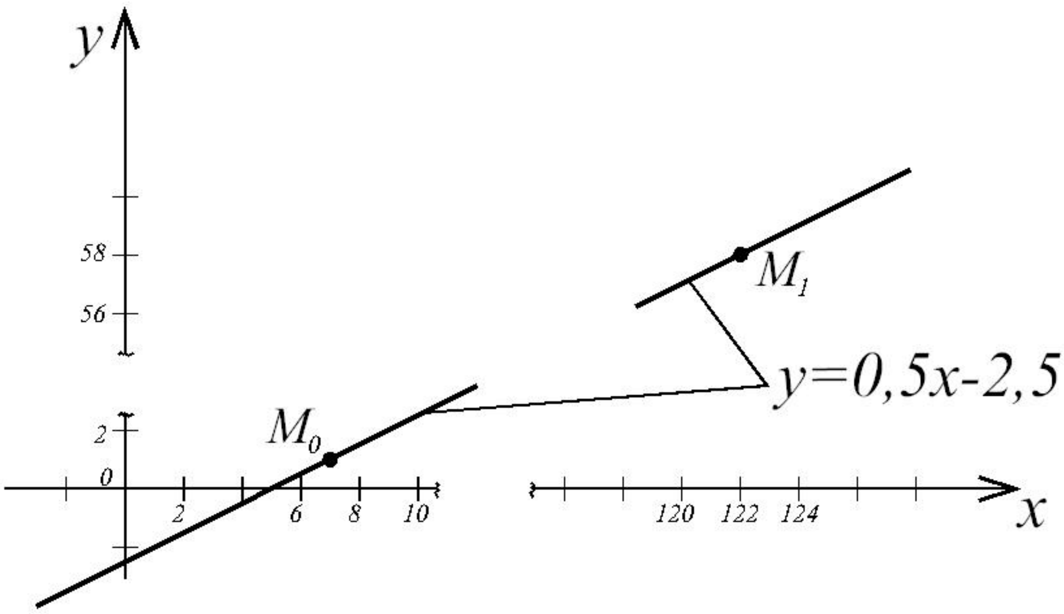


Рис. 5.1

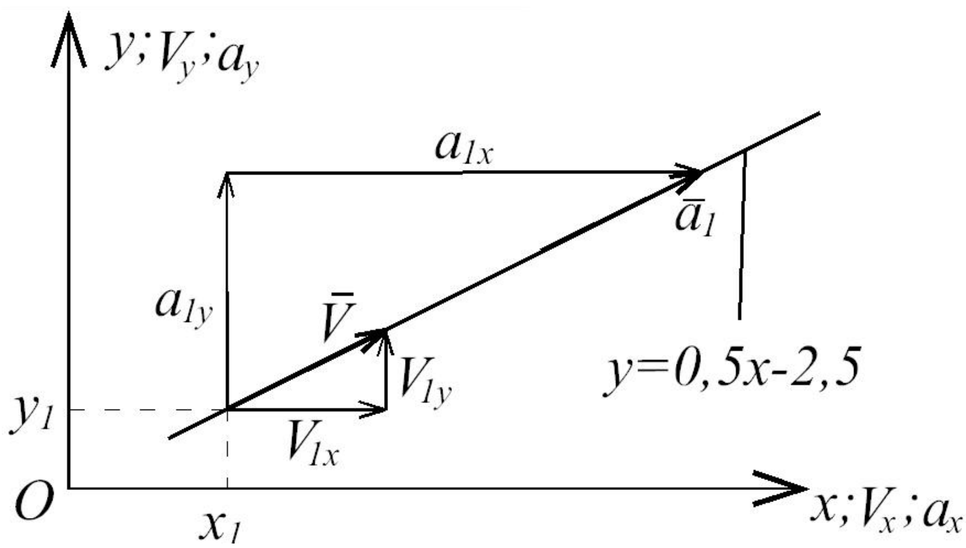


Рис. 5.2

3. Определим скорость точки в заданный ($t = t_1$) момент времени:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \text{ м/с},$$

где V_x и V_y - проекции скорости точки на координатные оси Ox и Oy соответственно.

Проекции скорости точки равны:

$$V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 6e^{3t} \cdot 3 = 18e^{3t}, \text{ м/с;}$$

$$V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = 3e^{3t} \cdot 3 = 9e^{3t}, \text{ м/с.}$$

В заданный ($t = t_1 = 1$с) момент времени проекции скорости точки равны:

$$V_{1x} = 18e^{3t_1} = 18e^{3\cdot 1} = 362 \text{ м/с;}$$

$$V_{1y} = 9e^{3t_1} = 9e^{3\cdot 1} = 181 \text{ м/с.}$$

Скорость точки M при $t = t_1$ равна:

$$V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \sqrt{(362)^2 + (181)^2} = 405 \text{ м/с.}$$

Проекции скорости точки V_{1x} и V_{1y} и вектор скорости точки $\vec{V_1}$ показаны на рис. 5.2.

4. Найдем полное ускорение точки в заданный момент времени. Для этого вычислим проекции ускорения точки при $t = t_1$:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = 54e^{3t}, \text{ м/с}^2\text{;}$$

$$a_y = \ddot{y} = \frac{dV_y}{dt} = 27e^{3t}, \text{ м/с}^2\text{.}$$

Эти проекции при $t = t_1 = 1$с:

$$a_{1x} = 54e^{3t_1} = 54e^{3\cdot 1} \approx 1090 \text{ м/с}^2\text{;}$$

$$a_{1y} = 27e^{3t_1} = 27e^{3\cdot 1} \approx 545 \text{ м/с}^2\text{.}$$

Полное ускорение точки в заданный момент времени:

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \sqrt{(1090)^2 + (545)^2} \approx 1220 \text{ м/с}^2\text{.}$$

Проекции a_{1x} и a_{1y} и вектор $\vec{a_1}$ ускорения точки показаны на рис. 5.2.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = 0$, т.к. траектория движения – прямая линия и вектор скорости $\vec{V}$ не меняется по направлению.

6. Касательное ускорение точки

$$a_\tau = a_1 = 1220 \text{ м/с}^2.$$

равно полному ее ускорению.

7. Радиус кривизны траектории $\rho = \infty$ лежит в бесконечности потому, что траектория движения точки – прямая линия.

Ответ: 1) $y = 0{,}5x - 2{,}5$;

2) $M_0(x_0 = 7м,\ y_0 = 1м)$;

3) $M_1(x_1 = 122м,\ y_1 = 58м)$;

4) $V_1 = 405$ м/с;

5) $a_1 = 1220$ м/с^2;

6) $a_\tau = a_1 = 1220$ м/с^2;

7) $a_n = 0$;

8) $\rho = \infty$.

6. Пример 3.

Движение точки M в плоскости xOy задано уравнениями:

$$x = 4\sin\frac{\pi t}{8} \quad (1) \qquad и \qquad y = 2\cos\frac{\pi t}{4} + 1 \quad (2),$$

где x и y измеряются в метрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории движения точки M и построить график этой функции на рисунке.

Решение.

Для решения задачи уравнение (1) представим в виде:

$$\sin\frac{\pi t}{8} = \frac{x}{4}, \tag{a}$$

а уравнение (2):

$$\cos\frac{\pi t}{4} = \frac{y-1}{2}. \tag{b}$$

Перепишем уравнение (b), принимая, что:

$$\frac{\pi t}{4} = 2\frac{\pi t}{8}.$$

Косинус двойного угла:

$$\cos\left(2\frac{\pi t}{8}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi t}{8}\right)-1.$$

Следовательно,

$$\cos\frac{\pi t}{4}=2\cos^2\left(\frac{\pi t}{8}\right)-1=\frac{y-1}{2}. \qquad (c)$$

Таким образом, из уравнения (c) получим:

$$\cos^2\left(\frac{\pi t}{8}\right)=0{,}25y+0{,}25. \qquad (d)$$

Возведем в квадрат обе части уравнения (a):

$$\sin^2\left(\frac{\pi t}{8}\right)=\left(\frac{x}{4}\right)^2. \qquad (e)$$

Складывая левые и правые части уравнений (d) и (e), учитывая, что

$$\sin^2\left(\frac{\pi t}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi t}{8}\right)=1,$$

после преобразований, получаем:

$$y=3-0{,}25x^2. \qquad (f)$$

Таким образом установили, что траекторией движения точки M является парабола.

Построение графика параболы будем производить «точечным» способом: на рисунке покажем точки соответствующие функции (f), затем при помощи лекал покажем данную кривую линию.

Для построения параболы будем давать определенные значения координате «x» и вычислять, таким образом, координату «y».

Составим таблицу:

x, м	0	-1	+1	-2	+2	-3	+3	-4	+4	-5	+5
y, м	3	2,75	2,75	2	2	0,75	0,75	-1	-1	-3,25	-3,25

В соответствии с данными этой таблицы на рис.6.1. показываем точки. Масштаб указан на рисунке.

По этим точкам при помощи соответствующих лекал строим график функций (f).

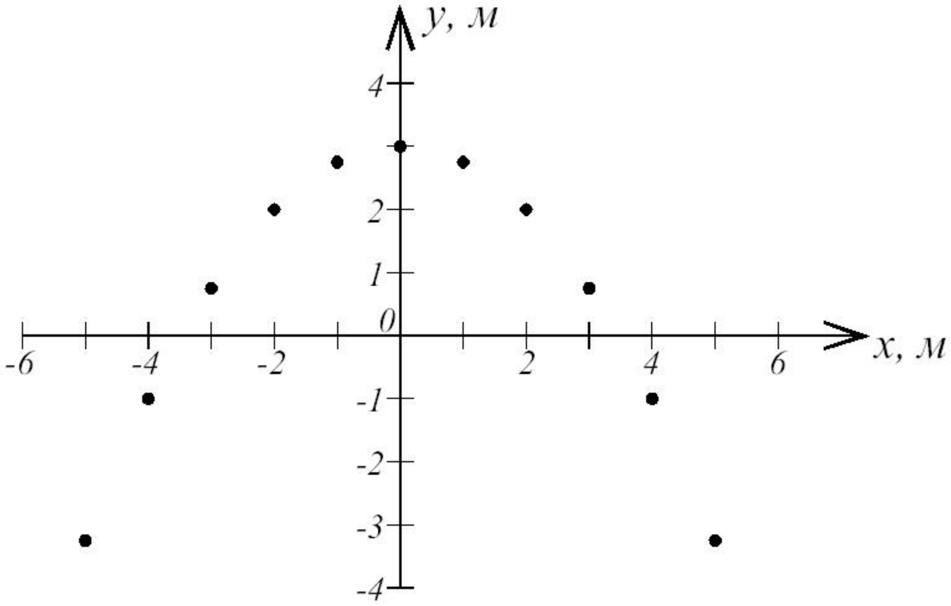


Рис. 6.1

Парабола $y = 3 - 0{,}25x^2$ показана на рис.6.2:

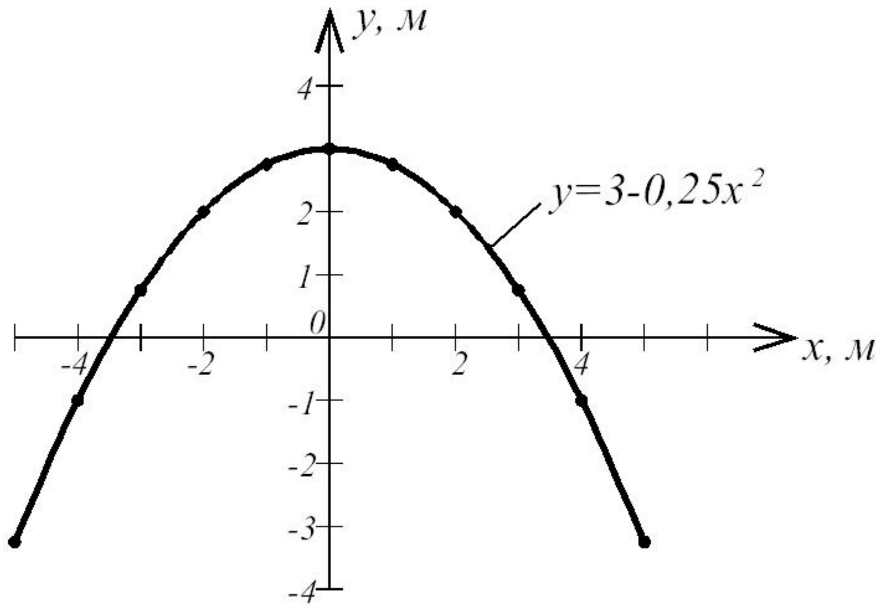


Рис. 6.2

7. Задание К1. Кинематика точки. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения.

Движение точки M в плоскости xOy задано уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$; x и y – в метрах, t – в секундах (табл. К1-1).

Значения коэффициентов a, b, c, d заданы в таблице К1-2. Необходимо:

1. Найти уравнение траектории точки M в координатной форме.
2. Построить траекторию точки и найти на траектории положение точки M в начальный момент времени (t = 0) и в заданный момент времени $t = t_1$ (таблица К1-2).
3. Для заданного момента времени определить скорость, полное, касательное и нормальное ускорения точки M, а также радиус кривизны траектории.
4. Векторы скорости и ускорения точки M показать на рисунке.

Указание: вариант из табл. К1-1 выбирать в соответствии с последней цифрой шифра (шифр – номер зачетной книжки).

Таблица К1-1

варіант		*варіант*	
1	$x = a\sin\frac{\pi t}{3} + b \qquad y = c\cos\frac{\pi t}{3}$	*2*	$x = at^2 + b$ $y = ct$
3	$x = a\sin^2\frac{\pi t}{6} + b \qquad y = c\cos^2\frac{\pi t}{6} + d$	*4*	$x = at^2 + b$ $y = ct^2 + d$
5	$x = a\sin\frac{\pi t}{3} \qquad y = c\cos^2\frac{\pi t}{3} + d$	*6*	$x = a\,\mathrm{e}^{2t} + b$ $y = c\,\mathrm{e}^{2t} - d$
7	$x = a\sin^2\frac{\pi t}{3} + b \qquad y = c\cos\frac{\pi t}{3}$	*8*	$x = a\,\mathrm{e}^{2t}$ $y = c\,\mathrm{e}^{-2t}$
9	$x = a\sin\frac{\pi t}{6} \qquad y = c\cos\frac{\pi t}{3} + d$	*0*	$x = at$ $y = ct^2 + d$

Таблица К1-2

Предпоследняя цифра шифра	**a**	**b**	**c**	**d**	**t_1**
1	9	3	9	2	0,5
2	6	2	2	1	1
3	3	1	3	3	2
4	2	0	4	0	2,5
5	4	1	6	2	1
6	8	2	4	3	2
7	6	3	3	1	0,5
8	8	0	2	0	1
9	9	1	8	2	2
0	4	2	4	1	2,5

8. Кинематика твердого тела.

Рассмотрим вначале простейшие случаи движения твердого тела: поступательное и вращательное вокруг неподвижной оси.

8.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором прямая, соединяющая любые две точки тела, при его движении остается все время параллельной самой себе.

Примеры поступательного движения:

- движение кузова автомобиля на прямолинейном участке дороги;

- движение ползуна кривошипно-шатунного механизма или движение поршня двигателя внутреннего сгорания на холостых оборотах (т.е. при остановленном автомобиле) и т.д.

Поступательное движение тела может быть как прямолинейным, так и криволинейным.

Основная теорема поступательного движения: *точки тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые, при наложении совпадающие траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения*.

Из этой теоремы следует, что поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки. Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематики точки, нами уже рассмотренной.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость V называют скоростью поступательного движения тела, а ускорение a – ускорением поступательного движения. Понятия о скорости и ускорении тела имеют смысл только при поступательном движении. Во всех остальных случаях, как увидим в дальнейшем, точки тела движутся с разными скоростями и ускорениями и термины «скорость тела» и «ускорение тела» для этих движений теряют смысл.

8.2. Вращательное движение твердого тела

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными.

Закон вращательного движения твердого тела выражается уравнением:

$$\varphi = f(t),$$

где φ - угол поворота тела, измеряется в радианах;

t – время, с.

Примеры задания закона вращательного движения: $\varphi = 4t^2$, рад; $\varphi = 2\pi t + 3$, рад; и т.д.

Определим законы вращательного движения секундной, минутной и часовой стрелок механических часов:

а) секундной стрелки

$$\varphi_1 = \frac{2\pi t}{60}, \text{ рад;}$$

б) минутной стрелки:

$$\varphi_2 = \frac{2\pi t}{3600}, \text{ рад;}$$

в этом уравнении учли, что один оборот минутная стрелка совершает за 1 час = = 60 минут = 3600 с.

в) часовой стрелки:

$$\varphi_3 = \frac{2\pi t}{43200}, \text{ рад;}$$

где 43200 с = 12 часов – время одного полного оборота часовой стрелки.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

<u>*Угловая скорость*</u> тела равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}, \text{ с}^{-1}.$$

Так, угловая скорость секундной стрелки механических часов равна:

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{2\pi}{60},\ \text{с}^{-1}.$$

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\vec{\omega}$, численная величина которого ω равна $\frac{d\varphi}{dt}$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (рис.8.1). Такой вектор сразу определяет и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения тела вокруг этой оси.

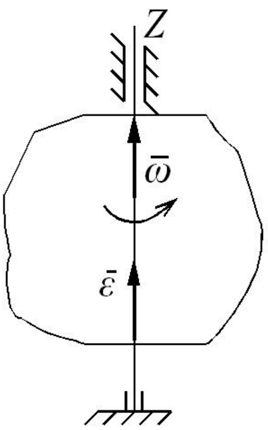


Рис. 8.1

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости с течением времени. Угловое ускорение тела в данный момент времени численно равно первой производной от угла поворота тела по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi},\ \text{с}^{-2}.$$

Если угловая скорость тела остается во все время движения постоянной ($\omega = const$), то вращение тела называется равномерным. Закон равномерного вращения

$$\varphi = \omega \cdot t.$$

Из этого равенства следует также, что при равномерном вращении

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

В технике скорость равномерного вращения часто определяют числом оборотов в минуту, обозначая эту величину через *n об/мин*. Зависимость между угловой скоростью ω (с$^{-1}$) и числом оборотов в минуту n (об/мин):

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Если угловое ускорение тела во все время движения остается постоянным ($\varepsilon = const$), то вращение называется *равнопеременным* и закон такого движения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t \pm \varepsilon \frac{t^2}{2}, \text{ рад;} \tag{1}$$

где φ_0 - начальное значение угла поворота тела, рад;

ω_0 - начальная угловая скорость тела, с$^{-1}$.

При ускоренном вращении третье слагаемое уравнения (1) имеет знак «плюс», а при замедленном (когда ω и ε имеют разные знаки) – «минус».

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) можно также изобразить в виде вектора $\vec{\varepsilon}$, направленного вдоль оси вращения. При этом направление $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\vec{\omega}$, когда тело вращается ускоренно (рис. 8.1) и противоположно $\vec{\omega}$ при замедленном вращении.

8.3. Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Скорость точки вращающегося твердого тела равна:

$$V = \omega \cdot h,$$

где ω - угловая скорость тела, с$^{-1}$;

h – расстояние от рассматриваемой точки до оси вращения тела, м.

Таким образом, линейная скорость точки вращающегося твердого тела численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

Направлена линейная скорость по касательной к описываемой точкой окружности в сторону угловой скорости тела.

Нормальное ускорение точки вращающегося тела равно произведению квадрата угловой скорости на расстояние до оси вращения:

$$a_n = \omega^2 \cdot h, \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение всегда направлено от рассматриваемой точки к оси вращения.

Касательное ускорение точки вращающегося твердого тела численно равно произведению углового ускорения тела на расстояние от данной точки до оси вращения:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot h, \text{ м/с}^2.$$

Направлено касательное ускорение точки вращающегося тела по касательной в сторону углового ускорения.

Если тело вращается равномерно, то касательное ускорение любой точки тела равно нулю.

Полное ускорение точки равно:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

8.4. Передача вращательного движения от одного тела к другому

Процесс передачи вращательного движения от одного твердого тела к другому широко используется в техническом оборудовании. Именно этот процесс характеризует работу, а, точнее, передачу механической энергии, как в редукторах: цилиндрическом, коническом, червячном и др., так и в передачах при помощи гибких систем: ременных, цепных, передачах трения и т.д.

Рассмотрим передачу вращательного движения на следующем примере (рис. 8.2). Шкив 1, радиусом R_1, соединен ременной передачей со шкивом 2, радиус которого R_2. Пренебрегая проскальзыванием ремня, считая, что угловая скорость шкива 1 равна ω_1, определить: 1) угловую скорость шкива 2; 2) скорость т.M, расположенной на ободе шкива 2. Направление вращения шкива 1 показано на рис. 8.2.

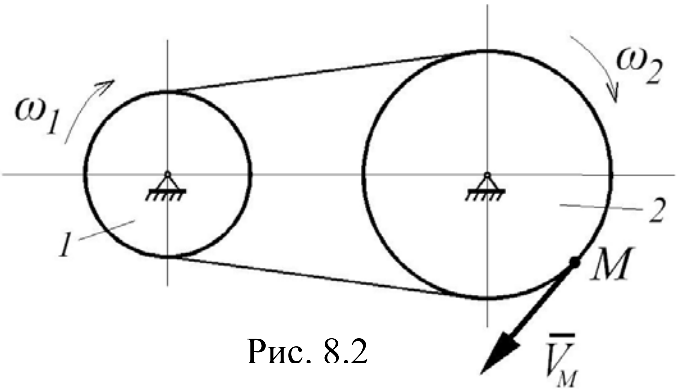


Рис. 8.2

Решение. Все точки ремня имеют равные линейные скорости, модуль которых, с одной стороны равен $V = \omega_1 \cdot R_1$, а, рассматривая вращение шкива 2: $V = \omega_2 \cdot R_2$. Таким образом, получаем:

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{R_1}{R_2}.$$

Скорость т.M равна:

$$V_M = \omega_2 \cdot R_2.$$

Направление вектора $\vec{V_M}$ определяется направлением угловой скорости шкива 2.

Передача вращения в цилиндрических редукторах происходит следующим образом (рис. 8.3). Вращение от ведущего вала *I* к ведомому валу *II* передается через

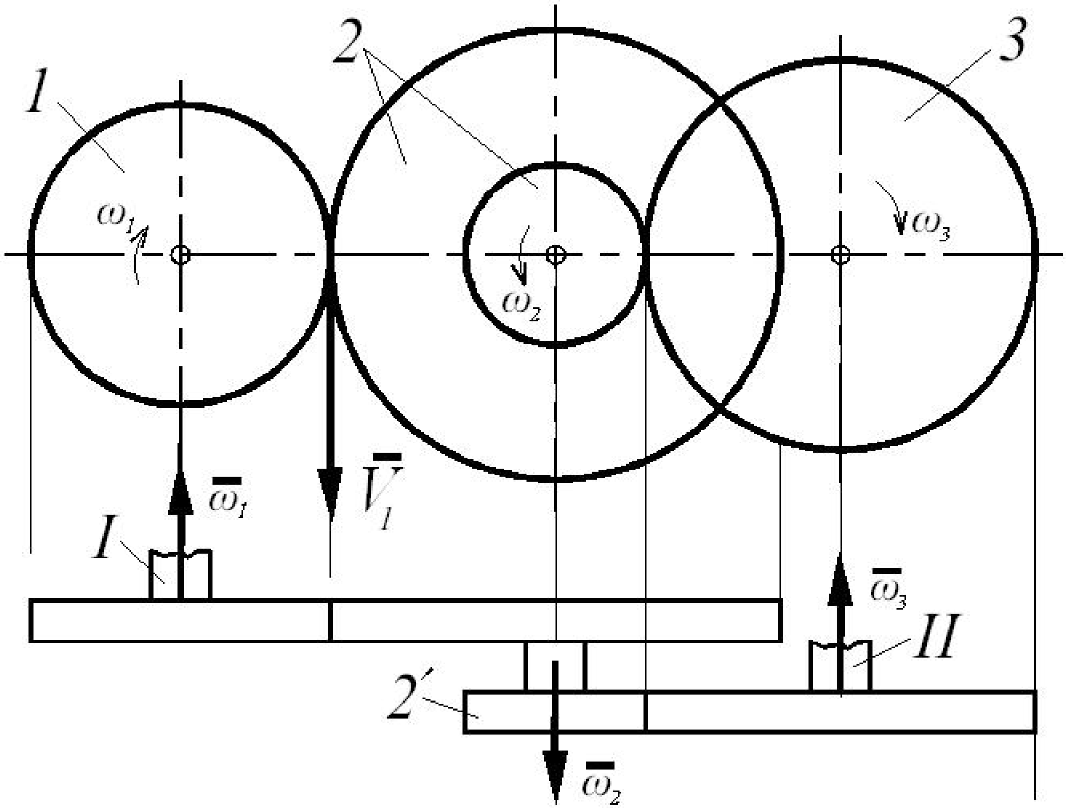


Рис. 8.3.

две пары находящихся в зацеплении зубчатых колес: пару 1-2 и пару $2^/$ -3. Линейная скорость V_1 точки соприкасания колеса 1 с колесом 2 относится к точкам обоих колес, следовательно, ее модуль равен

$$V_1 = \omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2,$$

откуда

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Таким образом, угловая скорость колес зубчатой передачи обратно пропорциональна радиусам этих колес.

Аналогично:

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{r_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot r_2}.$$

Отношение угловой скорости ведущего колеса (вала) к угловой скорости ведомого колеса (вала) называется передаточным числом или передаточным отношением:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_I}{\omega_{II}}.$$

Так как числа зубьев пропорциональны длинам окружностей и, следовательно, радиусам, то передаточное число определяется и по числу зубьев:

$$i = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot z_2}.$$

Таким образом, угловая скорость ведомого вала *II* равна:

$$\omega_{II} = \omega_3 = \omega_I \frac{R_1 \cdot r_2}{R_2 \cdot R_3} = \omega_1 \frac{Z_1 \cdot z_2}{Z_2 \cdot Z_3},$$

где: Z_1 - число зубьев ведущего колеса *1*;

Z_2 - число зубьев промежуточного колеса *2*;

z_2 - число зубьев промежуточного колеса *2'*;

Z_3 - число зубьев ведомого колеса *3*.

9. Задание К2. Простейшие движения твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях.

Прямолинейное поступательное движение тела *1* вдоль оси x задано уравнением $x = at^2 + bt + c$ (x – в сантиметрах, t – в секундах). Значения коэффициентов a, b, c и время t_1 заданы в таблице К2-1.

Для механизма, изображенного на рисунке К2.1, по заданному уравнению движения тела 1 найти для момента времени t_1 скорость и ускорение тела 1 и точки M колеса 3. Векторы скоростей и ускорений показать на рисунке механизма. Радиусы колес 2 и 3 (в сантиметрах) заданы в таблице К2-1.

Указание: схема механизма на рис. К2.1 выбирается в соответствии с последней цифрой шифра.

Таблица К2-1

Предпоследняя цифра шифра	r_2	R_2	r_3	R_3	a	b	c	t_1
1	5	10	10	20	10	5	10	5
2	10	20	15	25	15	10	20	4
3	15	30	20	30	20	15	30	3
4	20	40	25	35	25	20	40	2
5	25	50	30	40	30	25	50	1
6	30	60	35	45	35	30	15	4
7	35	70	40	50	40	35	25	3
8	40	80	45	55	45	40	35	2
9	45	90	50	60	50	45	45	1
0	50	100	55	65	100	50	55	0,5

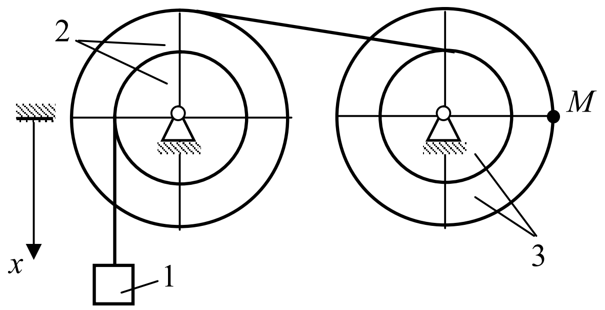
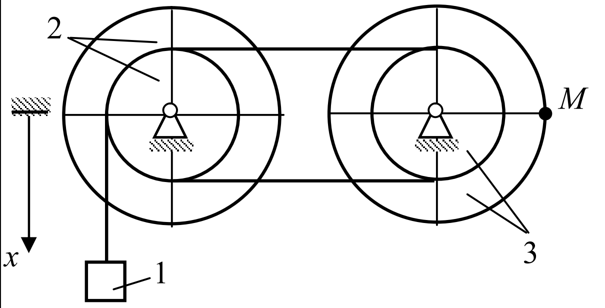
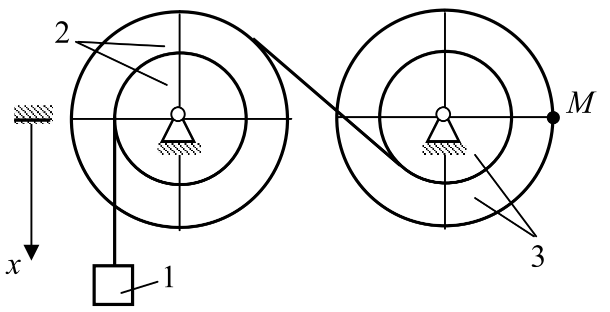
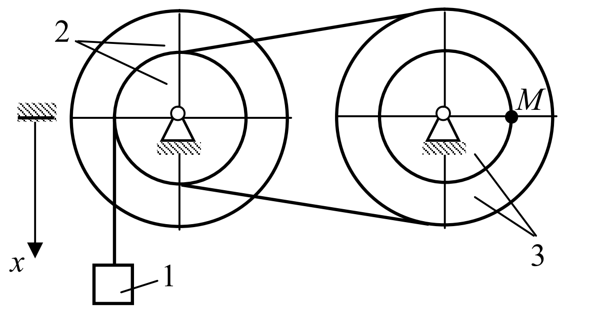
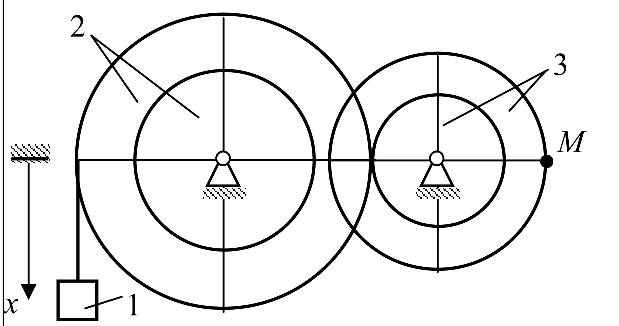
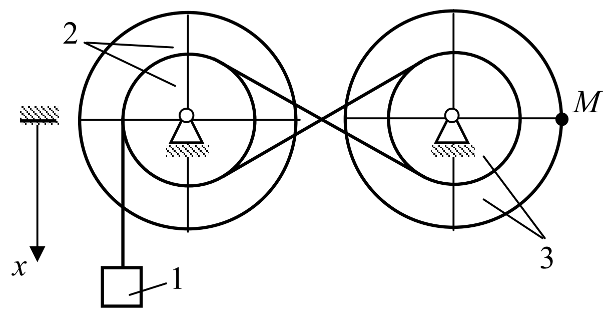
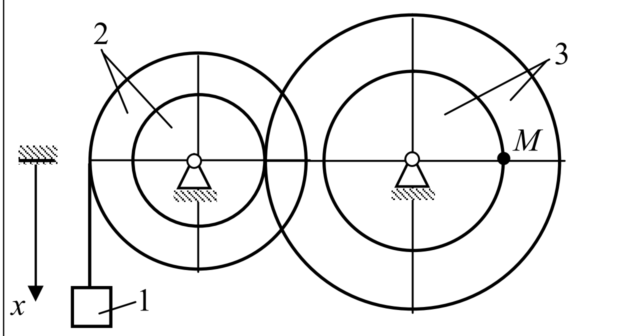
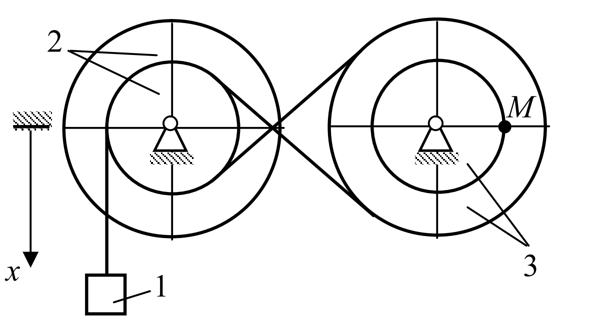
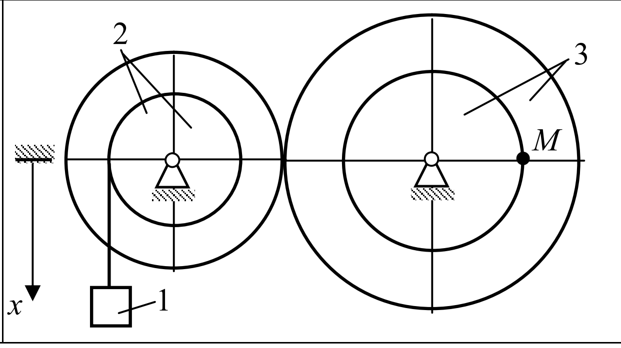
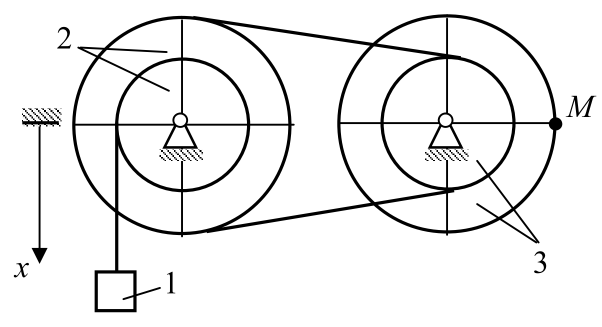
варіант		*варіант*	
1		*2*	
3		*4*	
5		*6*	
7		*8*	
9		*0*	

Рис. К2.1

к оглавлению

10. Пример 1 решения задания К2.

Груз B (рис. 10.1), опускаясь, приводит во вращение вал радиуса r_1 и сидящую на одной оси с валом шестерню 1 радиуса R_1. Движение груза начинается из состояния покоя и происходит с постоянным ускорением a. Определить скорость и ускорение т.A шестерни 2 радиусом R_2, которая находится в зацеплении с шестерней 1. На рисунке показать $\vec{V}_A$ и $\vec{a}_A$.

Запишем условие задачи в кратком виде:

Дано: $\underline{r_1;\ R_1;\ V_0 = 0;\ a;\ R_2}$

V_A - ? a_A - ?

Решение.

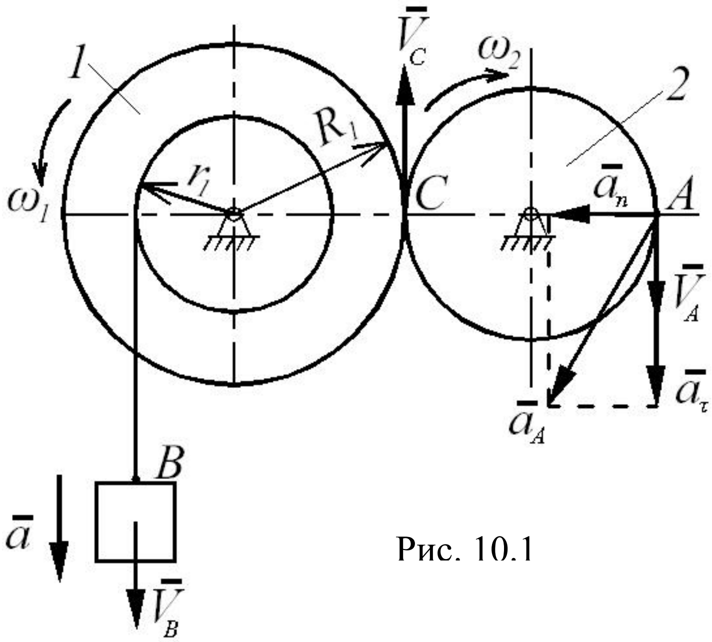


Рис. 10.1

Так как груз B начинает двигаться без начальной скорости, то его скорость в любой момент времени t будет равна at ($V_B = at$). Эту же скорость будут иметь все точки обода вала (т.е. точки, находящиеся на расстоянии r_1 от оси вращения). Но, с другой стороны, скорости этих точек равны $\omega_1 \cdot r_1$, где ω_1 - общая для вала и шестерни 1 угловая скорость. Следовательно,

$$\omega_1 \cdot r_1 = at, \qquad \text{и}$$

$$\omega_1 = \frac{at}{r_1}.$$

Теперь найдем угловую скорость ω_2 шестерни 2. Так как в точке C сцепления колес линейная скорость должна быть одной и той же для обеих шестерен, то

$$V_C = \omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2,$$

откуда:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{R_1}{R_2} = \frac{at}{r_1} \frac{R_1}{R_2} = \frac{aR_1}{r_1 R_2} t, \text{ с}^{-1}.$$

Итак, угловая скорость шестерни 2 растет пропорционально времени.

Скорость т.A шестерни 2 равна:

$$V_A = \omega_2 \cdot R_2 = \frac{aR_1}{r_1 R_2} t \cdot R_2 = \frac{aR_1}{r_1} t, \text{ м/с}.$$

Вектор $\vec{V}_A$ направлен по касательной в сторону угловой скорости шестерни 2 (см. рис. 10.1).

Полное ускорение точки A равно:

$$a_A = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение точки вращающегося твердого тела (шестерни 2):

$$a_n = \omega_2^2 \cdot R_2 = \left(\frac{aR_1}{r_1 R_2} t \right)^2 \cdot R_2 = \frac{a^2 R_1^2}{r_1^2 R_2} \cdot t^2, \text{ м/с}^2.$$

Вектор нормального ускорения $\vec{a}_n$ точки вращающегося твердого тела всегда направлен к оси вращения (см. рис. 10.1).

Касательное ускорение точки A (точки вращающегося твердого тела):

$$a_\tau = \varepsilon_2 \cdot R_2, \text{ м/с}^2.$$

Найдем угловое ускорение ε_2 шестерни 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{aR_1}{r_1 \cdot R_2}, \text{ с}^{-2}.$$

Касательное ускорение равно:

$$a_\tau = \frac{a \cdot R_1}{r_1 \cdot R_2} \cdot R_2 = \frac{a \cdot R_1}{r_1}, \text{ м/с}^2;$$

и направлено по касательной в сторону вектора $\vec{V}_A$.

Полное ускорение т.*A*:

$$a_A = \sqrt{\left(\frac{a^2 R_1^2}{r_1^2 R_2} \cdot t^2\right)^2 + \left(\frac{aR_1}{r_1}\right)^2} = \frac{aR_1}{r_1}\sqrt{\frac{a^2 R_1^2 t^4}{r_1^2 R_2^2} + 1}, \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_A$ показан на рисунке.

11. Плоское движение твердого тела.

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости. Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например, катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-шатунном механизме и др. Частным случаем плоского движения является вращательное движение твердого тела.

Плоскопараллельное движение твердого тела слагается из поступательного движения, при котором все точки тела движутся так же, как полюс, и из вращательного движения вокруг этого полюса.

В качестве полюса, при исследовании плоского движения твердого тела, рекомендуется выбирать точку тела, скорость и ускорение которой либо известны, либо определяются из условия задачи и кинематической схемы механизма.

Поступательная часть плоского движения описывается двумя уравнениями (условно, точку A тела принимаем за полюс):

$$x_A = f_1(t) \qquad \text{и} \qquad y_A = f_2(t). \tag{11.1}$$

Вращательная составляющая плоского движения может быть представлена уравнением:

$$\varphi = f_3(t). \tag{11.2}$$

Уравнения (11.1) и (11.2) называются *уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела*.

Изучение плоскопараллельного движения твердого тела сводится к определению основных кинематических характеристик, которыми являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорения полюса ($\vec{V}_{пост} = \vec{V}_A$; $\vec{a}_{пост} = \vec{a}_A$), а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг полюса. Значения этих характеристик в любой момент времени t можно найти из уравнений (11.1) и (11.2).

Следует подчеркнуть, что поступательная часть плоского движения, описываемая уравнениями (11.1) *зависит* от выбора полюса, в то время как вращательная составляющая этого движения от выбора полюса *не зависит*.

11.1. Определение скоростей точек тела

Плоское движение твердого тела, как упоминалось, слагается из поступательного движения, при котором точки тела движутся со скоростью полюса $\vec{V}_A$, и из вращательного движения вокруг этого полюса. Следовательно, скорость любой точки *B* тела, совершающего плоское движение, геометрически равна:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B-A}. \tag{11.3}$$

Таким образом, *скорость любой точки B тела геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и скорости точки B в ее движении вместе с телом вокруг этого полюса*.

Модуль скорости точки *B* в ее движении вместе с телом вокруг полюса *A* равна:

$$V_{B-A} = \omega_{AB} \cdot AB, \tag{11.4}$$

где: ω_{AB} – угловая скорость вращения твердого тела, $с^{-1}$;

AB – расстояние от точки *B* до полюса *A*, м.

Вектор $\vec{V}_{B-A}$ направлен перпендикулярно отрезку *AB* в сторону угловой скорости ω_{AB}.

Модуль и направление скорости V_B находятся построением соответствующего параллелограмма.

11.2. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

Определение скоростей точек тела с помощью формулы (11.3) связано обычно с относительно сложными расчетами. Однако, исходя из этого основного результата, можно получить ряд других, более удобных и простых методов определения скоростей точек тела.

Один из таких методов дает *теорема (о равенстве проекций скоростей концов отрезка на направление отрезка): проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны друг другу*.

Рассмотрим какие-нибудь две точки A и B тела (рис. 11.1). Согласно упомянутой теореме, проекция скорости $\vec{V}_A$ на направление AB (пр. $\left(\vec{V}_A\right)_{AB}$) равна проекции скорости $\vec{V}_B$ на то же направление AB: пр. $\left(\vec{V}_B\right)_{AB}$. То есть: $\left(\vec{V}_A\right)_{AB} = \left(\vec{V}_B\right)_{AB}$. В соответствии с рис. 11.1 проекция скорости $\vec{V}_A$ на направление AB равна:

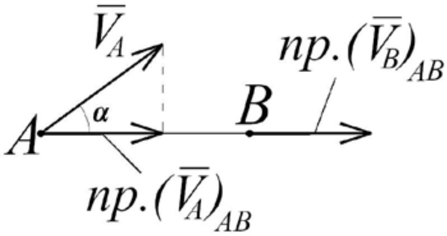


Рис. 11.1

$$\text{пр.}\left(\vec{V}_A\right)_{AB} = V_A \cdot \cos\alpha.$$

Если известно направление скорости т. B - $\vec{V}_B$, то ее модуль равен:

$$V_B = \frac{V_A \cdot \cos\alpha}{\cos\beta},$$

где β - угол между вектором $\vec{V}_B$ и направлением AB.

При этом обращаем внимание на следующее: *если проекция скорости* $\vec{V}_A$ *направлена от т. A к т. B, то и проекция скорости* $\vec{V}_B$ *будет направлена в ту же сторону*.

11.3. Мгновенный центр скоростей (МЦС)

Наряду с приведенной выше теоремой, другой простой и наглядный метод определения скоростей точек при плоскопараллельном движении твердого тела основан на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка «Р» плоской фигуры (как принадлежащая движущемуся телу, так и лежащая за его пределами), скорость которой в данный момент времени равна нулю и вокруг которой, в данный момент времени, вращается плоская фигура.

Правило I. Для определения МЦС надо знать направление скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры: *<u>МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек А и В к векторам их скоростей</u>*. Например (рис. 11.2): известны векторы скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ точек A и B плоской фигуры «S». Строим перпендикуляры из точек A и B к векторам $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ соответственно. Точка пересечения этих перпендикуляров P и есть мгновенный центр скоростей плоской фигуры S. Угловая скорость плоской фигуры «S» в данный момент времени равна:

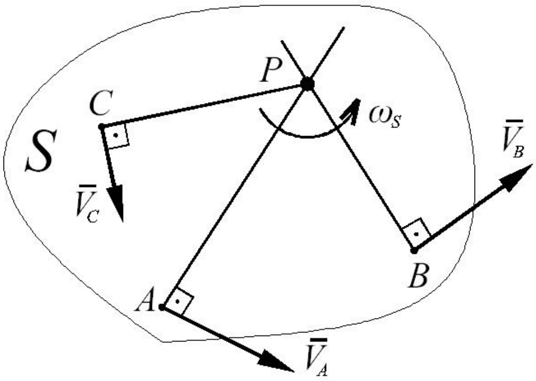


Рис. 11.2

$$\omega_S = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}.$$

Для нахождения скорости точки C этой плоской фигуры, соединяем ее с МЦС – точкой P отрезком прямой линии (рис. 11.2). Затем, из т. C в сторону угловой скорости тела ω_S строим перпендикуляр к отрезку CP. Этот перпендикуляр (в соответствующем масштабе) и будет вектором скорости т. C - $\vec{V}_C$.

Правило II. При качении без скольжения колеса по неподвижной поверхности (рис. 11.3), точка их соприкасания P имеет в данный момент времени скорость, равную нулю, и, следовательно, *<u>является для колеса мгновенным центром скоростей</u>*. Если известна скорость $\vec{V}_C$ центра масс колеса т. C, то, зная радиус колеса, легко определить как угловую скорость вращения колеса, так, и, для данного момента времени, скорость любых других точек колеса: угловая скорость колеса в данный момент времени:

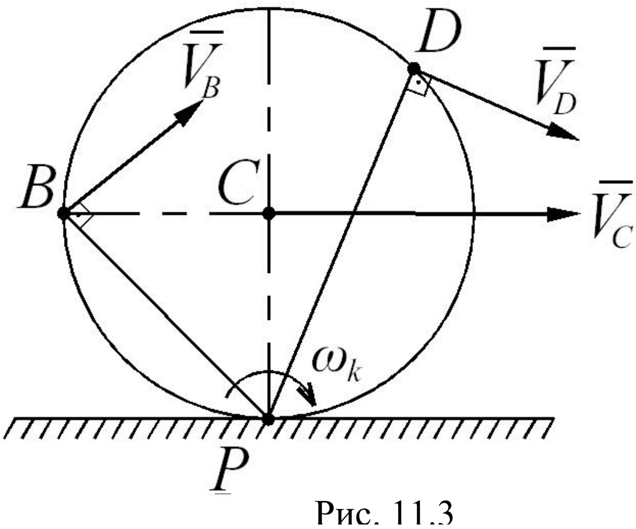


Рис. 11.3

$$\omega_K = \frac{V_C}{R},$$

где: R – радиус колеса.

Найдем скорость т. B колеса. По модулю она равна:

$$V_B = \omega_K \cdot PB = \frac{V_C}{R} \cdot R\sqrt{2} = V_C\sqrt{2}, \text{ м/с.}$$

Направление вектора $\vec{V}_B$ перпендикулярно PB в сторону угловой скорости ω_K.

Если требуется определить скорость некоторой точки D колеса, то она равна:

а) по модулю:

$$V_D = \omega_K \cdot PD;$$

б) по направлению: $\vec{V}_D$ есть перпендикуляр к отрезку PD в сторону угловой скорости колеса ω_K.

Правило III. Если скорости точек A и B тела параллельны друг другу и равны по модулю, то МЦС лежит в бесконечности и, в данный момент времени тело совершает мгновенно поступательное движение (рис. 11.4). Следовательно, и все другие точки тела в данный момент времени имеют скорости равные и параллельные $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$.

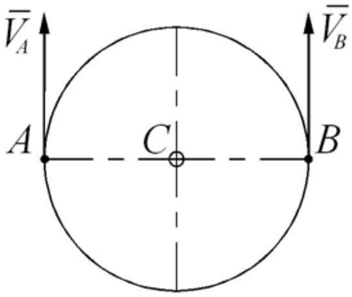


Рис. 11.4

Правило IV. Если же скорости точек A и B тела параллельны, но не равны по модулю, то МЦС определяется построениями, показанными на рис. 11.5 и 11.6.

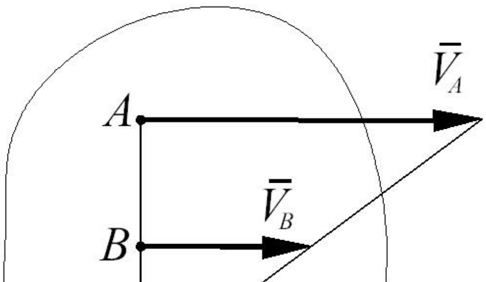


Рис. 11.5

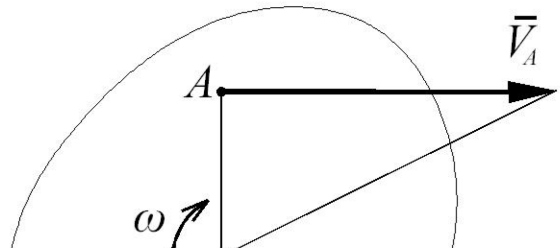


Рис. 11.6

11.4. Определение ускорений точек тела

<u>Ускорение любой точки B тела геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и ускорения точки B в ее движении вместе с телом вокруг этого полюса</u>:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau} + \vec{a}_{B-A}^{\,n} + \vec{a}_{B-A}^{\,\tau},$$

где: $\vec{a}_A^{\,n}$ - нормальное ускорение полюса (т. A);

$\vec{a}_A^{\,\tau}$ - касательное ускорение полюса (т. A);

$\vec{a}_{B-A}^{\,n}$ - нормальное ускорение т. B тела при его вращении вокруг полюса (т. A);

$\vec{a}_{B-A}^{\,\tau}$ - касательное ускорение т. B тела при его вращении вокруг полюса (т. A).

По модулю ускорения т. B вокруг т. A равны:

$$a_{B-A}^{n} = \omega^2 \cdot BA, \text{ м/с}^2;$$

$$a_{B-A}^{\tau} = \varepsilon \cdot BA, \text{ м/с}^2.$$

где: ω - угловая скорость плоской фигуры, с$^{-1}$;

ε - угловое ускорение плоской фигуры, с$^{-2}$.

Нормальное ускорение т. B тела при его вращении вокруг т. A всегда направлено от точки B к точке A. Касательное же ускорение т. B тела при его вращении вокруг т. A направлено по касательной в сторону углового ускорения плоской фигуры.

<u>Пример</u>. Ускорение т. A плоской фигуры I (рис. 11.7) равно 5 м/с^2. Найти ускорения точек B и C, если AB = 1,0 м; AC = 2,0 м; ω_I = 2 с$^{-1}$ и ε_I = 1,5 с$^{-2}$. Направления $\vec{a}_A$, ω и ε показаны на рисунке.

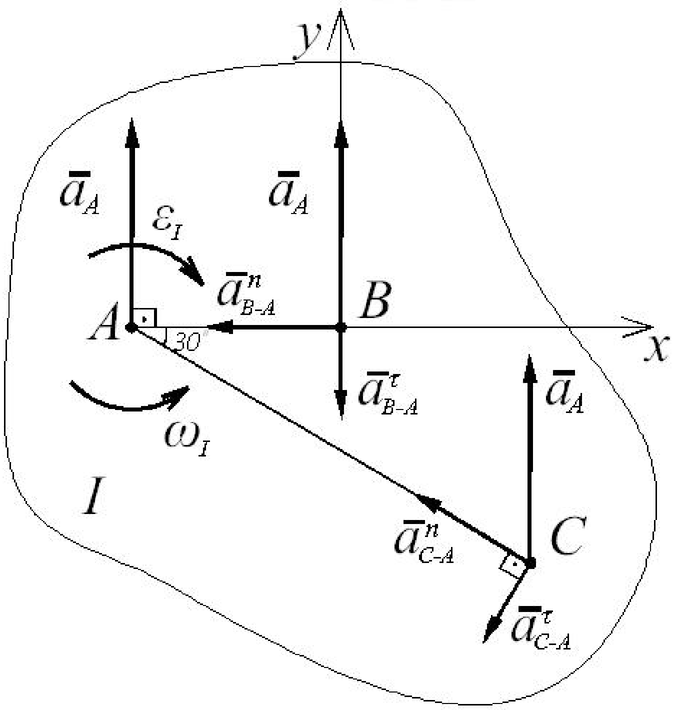


Рис. 11.7

Решение.

1. Определим ускорение т. *B*. Ускорение т. *B* плоской фигуры I равно геометрической сумме ускорения полюса (за полюс принимаем т. *A*, т.к. ускорение этой точки известно по условию задачи) и ускорения т. *B* при вращении плоской фигуры I вокруг полюса:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{B-A} + \vec{a}^\tau_{B-A}. \qquad (11.5)$$

Показываем вектор ускорения полюса $\vec{a}_A$ из точки *B* (переносим вектор $\vec{a}_A$ в т. *B* параллельно самому себе).

Нормальное ускорение т. *B* вокруг полюса равно:

$$a^n_{B-A} = \omega_I^2 \cdot AB = 2^2 \cdot 1{,}0 = 4 \text{ м/с}^2,$$

и направлено от т. *B* к т. *A*.

Касательное ускорение т. *B* вокруг полюса равно:

$$a^\tau_{B-A} = \varepsilon_I \cdot AB = 1{,}5 \cdot 1{,}0 = 1{,}5 \text{ м/с}^2,$$

и направлено из т. *B* перпендикулярно отрезку *AB* в сторону углового ускорения плоской фигуры ε_I.

Таким образом, полное ускорение т. B складывается из трех векторов: $\vec{a}_A$, $\vec{a}^{\,n}_{B-A}$ и $\vec{a}^{\,\tau}_{B-A}$.

Модуль ускорения a_B найдем через его проекции на выбранные оси координат x и y, т.е.

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}.$$

Проекция ускорения т. B на ось x равна (проектируем на ось x обе части векторного уравнения (11.5)):

$$a_{Bx} = -a^n_{B-A} = -4 \text{ м/с}^2.$$

Проекция ускорения т. B на ось y равна:

$$a_{By} = a_A - a^\tau_{B-A} = 5 - 1{,}5 = 3{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Модуль ускорения т. B:

$$a_B = \sqrt{(-4)^2 + (3{,}5)^2} = 5{,}3 \text{ м/с}^2.$$

Направление $\vec{a}_B$, при необходимости, можно показать, т.к. проекции $\vec{a}_B$ нам известны.

2. Найдем ускорение т. C:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{C-A} + \vec{a}^{\,\tau}_{C-A}.$$

Показываем из т. C вектор ускорения полюса $\vec{a}_A$.

Нормальное ускорение

$$a^n_{C-A} = \omega_I^2 \cdot AC = 2^2 \cdot 2{,}0 = 8 \text{ м/с}^2,$$

и направлено от т. C к т. A.

Касательное ускорение

$$a^\tau_{C-A} = \varepsilon_I \cdot AC = 1{,}5 \cdot 2{,}0 = 3 \text{ м/с}^2,$$

и направлено из т. C перпендикулярно отрезку AC в сторону углового ускорения плоской фигуры ε_I.

Модуль ускорения a_C равен:

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2}.$$

Проекция ускорения т. C на ось x равна:

$$a_{Cx} = -a_{C-A}^n \cdot \cos 30^0 - a_{C-A}^\tau \cdot \sin 30^0 = -8 \cdot 0{,}87 - 3 \cdot 0{,}5 = -8{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Проекция ускорения т. C на ось y равна:

$$a_{Cy} = a_A + a_{C-A}^n \cdot \sin 30^0 - a_{C-A}^\tau \cdot \cos 30^0 = 5 + 8 \cdot 0{,}5 - 3 \cdot 0{,}87 = 6{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом:

$$a_C = \sqrt{(-8{,}5)^2 + (6{,}4)^2} = 10{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_B = 5{,}3$ м/с^2, $a_C = 10{,}6$ м/с^2.

12. Задание К3. Плоское движение твердого тела. Кинематический анализ плоского механизма.

Найти для заданного положения механизма (рис. К3.1) скорости и ускорения точек *B* и *C*, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат. Необходимые для расчета данные приведены в таблице К3-1.

Указание: схема механизма на рис. К3.1 выбирается в соответствии с последней цифрой шифра.

Таблица К3-1

Предпоследняя цифра шифра	ω_{OA}, c^{-1}	ε_{OA}, c^{-2}	*OA*, см	*AB*, см	*AC*, см
1	4	6	12	24	10
2	3	4	14	28	12
3	2	3	16	32	14
4	1	2	18	36	16
5	3	5	20	40	18
6	2	4	22	44	20
7	1	3	24	48	22
8	2	5	26	52	24
9	3	2	28	56	26
0	2	6	30	60	30

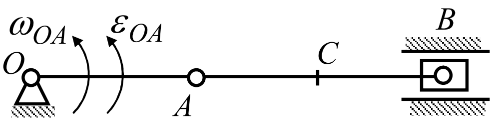
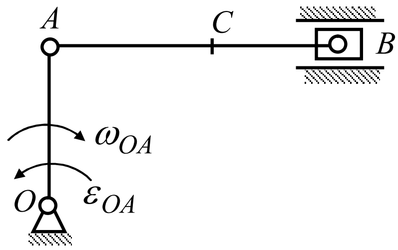
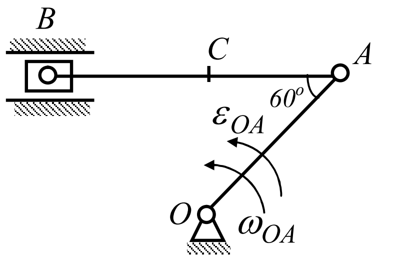
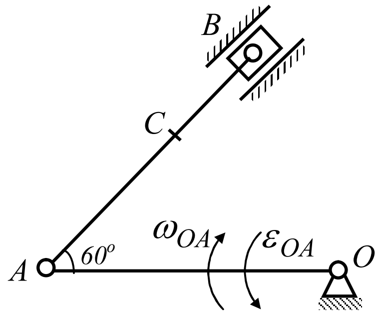
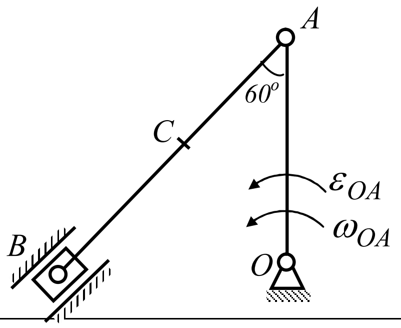
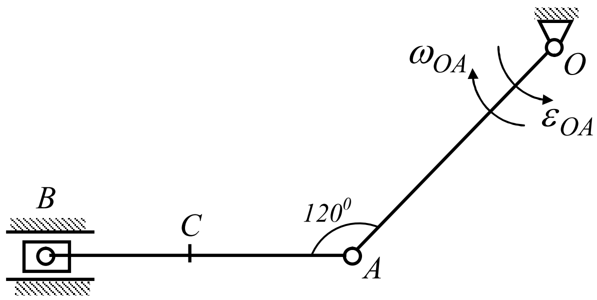
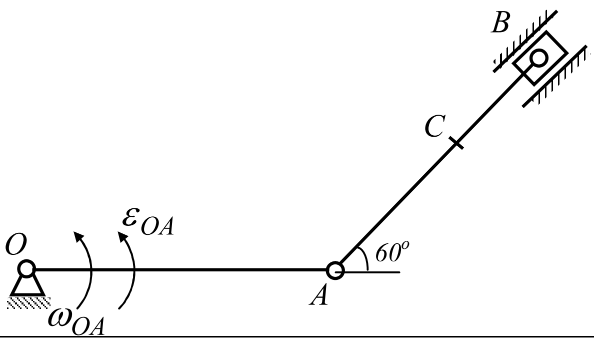
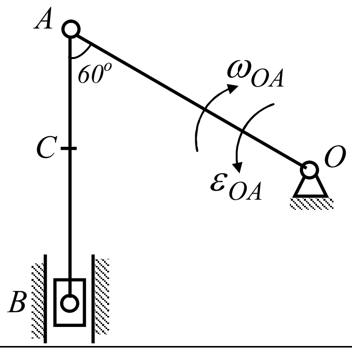
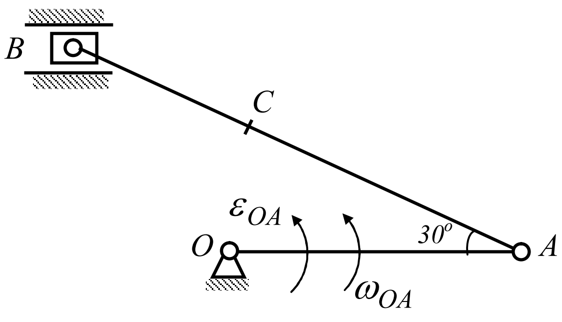
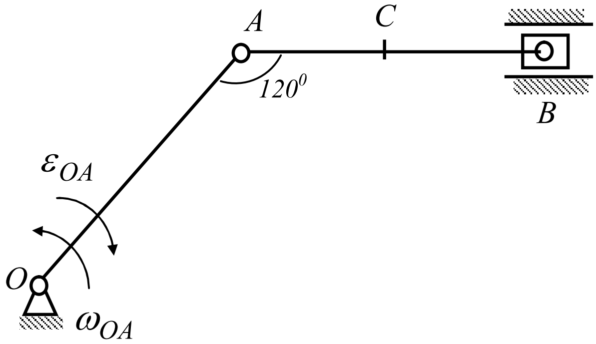
<table>
<tr><td>варіант</td><td></td><td>варіант</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>4</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
</td><td>6</td><td>
</td></tr>
<tr><td>7</td><td>
</td><td>8</td><td>
</td></tr>
<tr><td>9</td><td>
</td><td>0</td><td>
</td></tr>
</table>

Рис. К3.1

13. Пример решения задания К3.

Условие задачи: найти для данного положения механизма (рис. К3.2) скорости и ускорения точек *B* и *C*, а также угловую скорость и угловое ускорение звена *AB*, если: $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$; $\varepsilon_{OA} = 3$ с$^{-2}$; *OA* = 40 см; *AB* = 80 см; *AC* = 40 см.

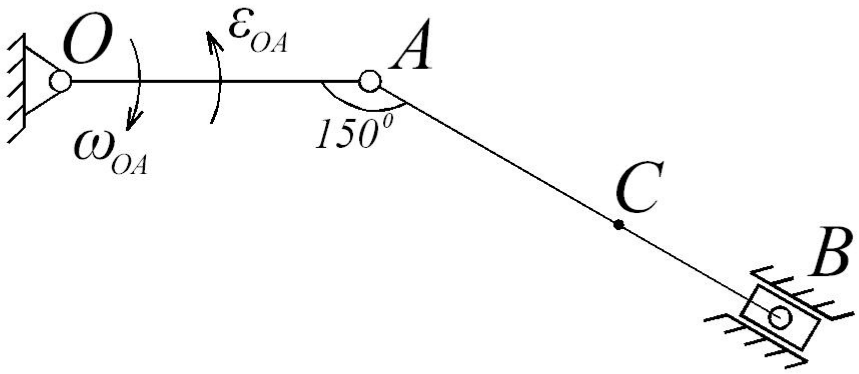


Рис. К3.2

Решение.

В данном механизме звено *OA* совершает вращательное движение вокруг т. *O*. Ползун *B* движется поступательно. Звено *AB* совершает плоское движение. Точка *A* принадлежит одновременно двум звеньям – *OA* и *AB*. Поскольку скорость и ускорение т. *A* звена *OA* определить достаточно просто, то, при исследовании плоского движения звена *AB*, примем точку *A* за полюс.

Решать задачу будем в следующем порядке:

1. Определим скорость и ускорение точки *A*:

1.1. Скорость т. *A*:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 40 = 80 \text{ см/с}.$$

Направление $\vec{V}_A$ показано на рис. К3.3.

1.2. Ускорение т. *A* складывается из ускорений нормального и касательного:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau.$$

Нормальное ускорение т. *A*:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 40 = 160 \text{ см/с}^2.$$

Касательное ускорение т. *A*:

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 3 \cdot 40 = 120 \text{ см/с}^2.$$

Векторы $\vec{a}_A^n$ и $\vec{a}_A^\tau$ показаны на рис. К3.3.

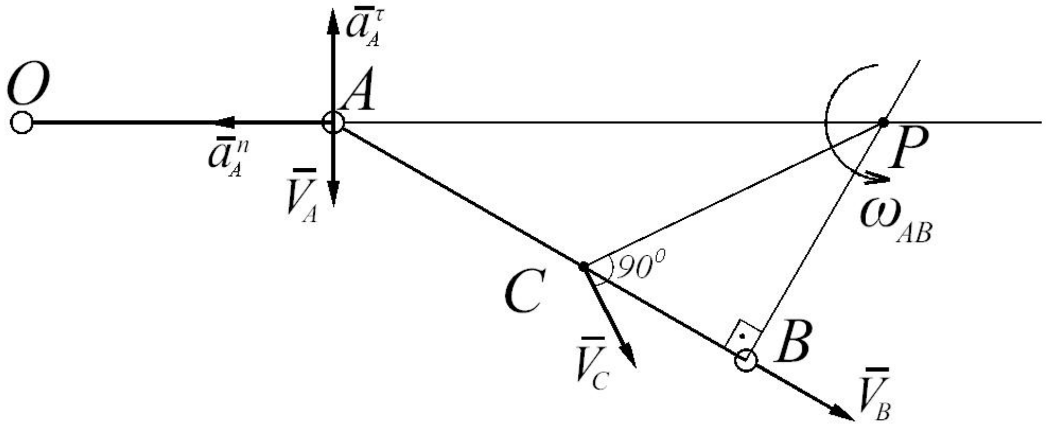


Рис. К3.3

2. Определение скорости т. B.

Рассмотрим звено AB, совершающее плоское движение. Скорость полюса – т. A, известна по модулю и направлению. Скорость т. B нам известна только по направлению – ползун B может перемещаться вдоль наклонных неподвижных направляющих, следовательно, и $\vec{V}_B$ направлена параллельно этим направляющим. В этом случае, для нахождения модуля скорости V_B целесообразно воспользоваться теоремой о равенстве проекций скоростей концов отрезка на направление отрезка:

$$\text{пр. } \vec{V}_A(AB) = \text{пр. } \vec{V}_B(AB).$$

Или

$$V_A \cdot \cos 60^0 = V_B.$$

Здесь $\angle 60^0 = 150^0 - 90^0$.

Таким образом

$$V_B = V_A \cdot \cos 60^0 = 80 \cdot 0{,}5 = 40 \text{ см/с}.$$

Направление вектора $\vec{V}_B$ покажем на рис. К3.3.

3. Найдем угловую скорость звена AB.

Для этого прежде определим положение мгновенного центра скоростей звена AB. Построим перпендикуляры к векторам $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ из точек A и B соответственно.

Точка пересечения этих перпендикуляров (точка P) и будет мгновенным центром скоростей звена AB.

Угловая скорость

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}.$$

Расстояние

$$AP = \frac{AB}{\cos 30^0} = \frac{80}{0{,}87} = 92 \text{ см}.$$

Следовательно

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{80}{92} = 0{,}87 \text{ с}^{-1}.$$

4.Определим скорость т. C.

Направление $\vec{V}_C$ определим, зная положение МЦС звена AB, которому принадлежит т. C: соединяем точки P и C отрезком прямой линии и из т. C восстанавливаем к этому отрезку перпендикуляр в соответствии с направлением угловой скорости ω_{AB}. Это и есть вектор $\vec{V}_C$ (см. рис. К3.3).

Модуль

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP.$$

Расстояние CP определим из прямоугольного треугольника BCP:

$$CP = \sqrt{BC^2 + BP^2}.$$

Катеты треугольника BCP равны:

$$BC = AB - AC = 80 - 40 = 40 \text{ см}.$$

$$BP = AP \cdot \sin 30^0 = 92 \cdot 0{,}5 = 46 \text{ см}.$$

Таким образом

$$CP = \sqrt{(40)^2 + (46)^2} = 61 \text{ см}.$$

Следовательно

$$V_C = 0{,}87 \cdot 61 = 53 \text{ см/с}.$$

5. Найдем ускорение т. B.

Ускорение т. B звена AB, совершающего плоское движение, найдем, зная ускорение полюса – т. A:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau} + \vec{a}_{B-A}^{\,n} + \vec{a}_{B-A}^{\,\tau}, \qquad (13.1)$$

где: $\vec{a}_{B-A}^{\,n}$ - нормальное ускорение т. B по отношению к полюсу A;

$\vec{a}_{B-A}^{\,\tau}$ - касательное ускорение т. B по отношению к полюсу A.

На рис. К3.4 покажем звено AB. В соответствии с векторным уравнением (13.1) покажем из точки B векторы $\vec{a}_A^{\,n}$ и $\vec{a}_A^{\,\tau}$.

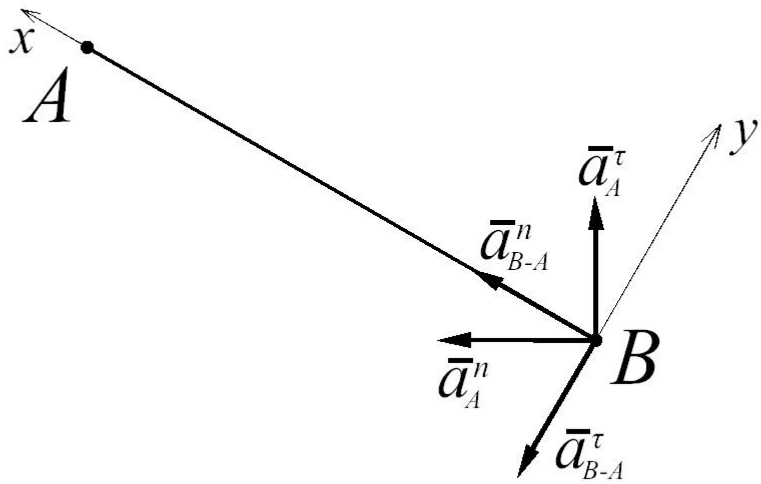


Рис. К3.4

Нормальное ускорение т. B по отношению к полюсу

$$a_{B-A}^{n} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = (0{,}87)^2 \cdot 80 = 61 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{B-A}^{\,n}$ направлен от точки B к полюсу A. На рис. К3.4. покажем этот вектор.

Выберем систему координат XY с началом в т. B. Очевидно, что в этой системе отсчета касательное ускорение $\vec{a}_{B-A}^{\,\tau}$ будет направлено вдоль оси Y, но, в какую сторону мы пока не знаем. Модуль этого ускорения

$$a_{B-A}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$$

нам также неизвестен, т.к. на данном этапе решения задачи не можем определить ε_{AB}.

Но, также очевидно, что вектор $\vec{a}_B$ в принятой системе координат может быть направлен только вдоль оси *X*. Поэтому спроектируем векторное уравнение (13.1) на ось *X*:

$$a_B = a_A^n \cdot \cos 30^0 + a_A^\tau \cdot \sin 30^0 + a_{B-A}^n = 160 \cdot 0{,}87 + 120 \cdot 0{,}5 + 61 = 260 \text{ см/с}^2.$$

Направлен вектор $\vec{a}_B$ от точки *B* к точке *A* (на рис. К3.4 не показан).

Для определения a_{B-A}^τ спроектируем векторное уравнение (13.1) на ось *У*:

$$0 = -a_A^n \cdot \sin 30^0 + a_A^\tau \cdot \cos 30^0 + a_{B-A}^\tau. \qquad (13.2)$$

В уравнении (13.2) мы предположили, что вектор $\vec{a}_{B-A}^\tau$ направлен вдоль оси *У* вверх. Действительное направление этого ускорения узнаем в результате решения этого уравнения:

$$a_{B-A}^\tau = a_A^n \cdot \sin 30^0 - a_A^\tau \cdot \cos 30^0 = 160 \cdot 0{,}5 - 120 \cdot 0{,}87 = -24 \text{ см/с}^2.$$

Знак «минус» показывает, что в действительности этот вектор направлен в область отрицательных значений оси *У*. Покажем $\vec{a}_{B-A}^\tau$ на рис. К3.4.

6. Определим угловое ускорение

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{B-A}^\tau}{AB} = \frac{24}{80} = 0{,}3 \text{ с}^{-2}.$$

7. Вычислим ускорение точки *C*:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{C-A}^n + \vec{a}_{C-A}^\tau, \qquad (13.3)$$

где: $\vec{a}_{C-A}^n$ - нормальное ускорение т. *C* по отношению к полюсу *A*;

$$a_{C-A}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = (0{,}87)^2 \cdot 40 = 30{,}5 \text{ см/с}^2.$$

$\vec{a}_{C-A}^\tau$ - касательное ускорение т. *C* по отношению к полюсу *A*.

$$a_{C-A}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 0{,}3 \cdot 40 = 12 \text{ см/с}^2.$$

На рис. К3.5 покажем звено AB, точку C этого звена, к которой приложим все векторы ускорений, входящих в правую часть уравнения (13.3).

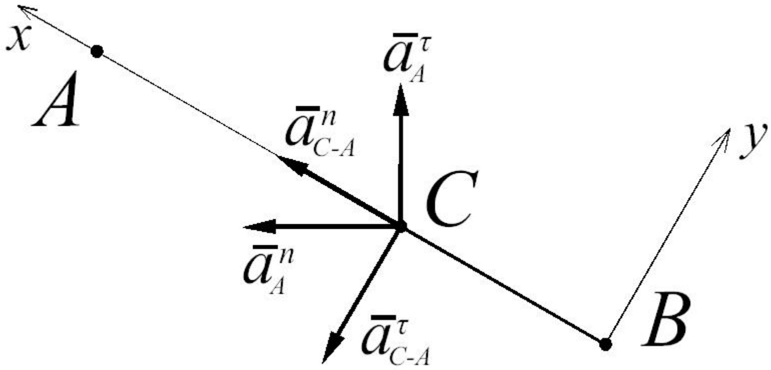


Рис. К3.5

Модуль ускорения т. C равен:

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2},$$

где a_{Cx} и a_{Cy} - проекции ускорения т. C на оси выбранной системы координат X и $У$, соответственно.

Эти проекции равны:

$$a_{Cx} = a_A^n \cdot \cos 30^0 + a_A^\tau \cdot \sin 30^0 + a_{C-A}^n = 160 \cdot 0{,}87 + 120 \cdot 0{,}5 + 30{,}5 = 230 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{Cy} = -a_A^n \cdot \sin 30^0 + a_A^\tau \cdot \cos 30^0 - a_{C-A}^\tau = -160 \cdot 0{,}5 + 120 \cdot 0{,}87 - 12 = 12{,}4 \text{ см/с}^2.$$

Таким образом,

$$a_C = \sqrt{(230)^2 + (12{,}4)^2} = 230{,}3 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_C$ на рис. К3.5 не показан.

Ответ: $V_B = 40$ см/с; $V_C = 53$ см/с; $\omega_{AB} = 0{,}87$ с$^{-1}$;

$a_B = 260$ см/с^2; $a_C = 230{,}3$ см/с^2; $\varepsilon_{AB} = 0{,}3$ с$^{-2}$.

14. Сложное движение точки.

В ряде случаев, при решении задач механики оказывается целесообразным (а иногда и необходимым) рассматривать движение точки одновременно по отношению к двум системам координат, из которых одна считается неподвижной, а вторая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой, называется *сложным*.

Например, шар, катящийся по палубе движущегося теплохода, можно считать совершающим по отношению к берегу (неподвижная система координат) сложное движение, состоящее из качения по отношению к палубе (подвижная система отсчета) и движения вместе с палубой по отношению к берегу. Таким образом, сложное движение шара разлагается на два более простых и более легко исследуемых вида движения.

Еще пример. Допустим муха, находящаяся на ободе виниловой пластинки в т. A (рис. 14.1) начала двигаться к ее центру O по кратчайшему направлению AO. Предположим далее, что в момент, когда муха находилась в т. B, пластинка начала вращаться с некоторой угловой скоростью ω. Тогда движение мухи относительно неподвижной системы отсчета (например, относительно стола, на котором стоит проигрыватель пластинок) является сложным.

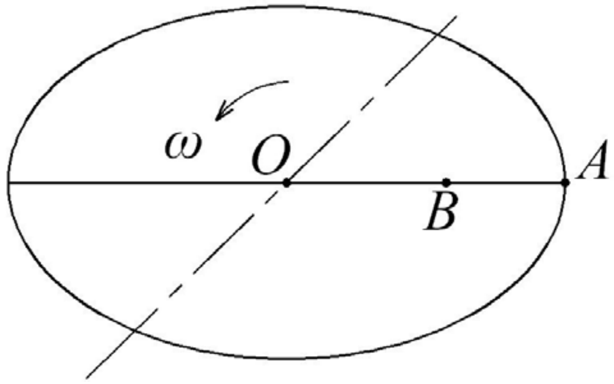


Рис. 14.1

Это движение можно разложить на два простых: 1) движение мухи относительно пластинки, или, иначе, движение мухи относительно подвижной системы отсчета, и 2) движение той точки пластинки, в которой в данный момент времени находится муха, относительно неподвижной системы отсчета. Таким образом, сложное движение мухи мы заменим двумя движениями, проходящими хотя и одновременно, но не зависимо друг от друга.

На основе указанных примеров введем следующие определения:

1. Движение, совершаемое точкой по отношению к подвижным осям координат (шара по отношению к палубе и мухи по отношению к вращающейся пластинке), называется *относительным движением*.

2. Движение той точки подвижной системы отсчета, в которой в данный момент находится рассматриваемая точка (точка палубы, где в данный момент находится шар, относительно берега или точка пластинки, в которой в данный момент находится муха, относительно стола), относительно неподвижной системы отсчета называется *переносным движением*.

3. Движение, совершаемое рассматриваемой точкой относительно неподвижной системы отсчета (движение шара относительно берега или движение мухи относительно стола), называется *абсолютным или сложным*.

Аналогично, скорость и ускорение точки в относительном движении называется *относительной скоростью* и *относительным ускорением*. Скорость и ускорение точки в переносном движении называются *переносной скоростью* и *переносным ускорением*. И, естественно, скорость и ускорение точки относительно неподвижной системы отсчета называются *абсолютной скоростью* и *абсолютным ускорением* точки соответственно.

14.1. Теорема о сложении скоростей.

При сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_r + \vec{V}_e,$$

где: $\vec{V}_r$ - вектор относительной скорости;

$\vec{V}_e$ - вектор переносной скорости.

В механике условились относительное движение, скорость и ускорение записывать с индексом «*r*», переносное – с индексом «*e*», а абсолютное – с индексом «*a*» или в соответствии с принятым обозначением конкретной точки.

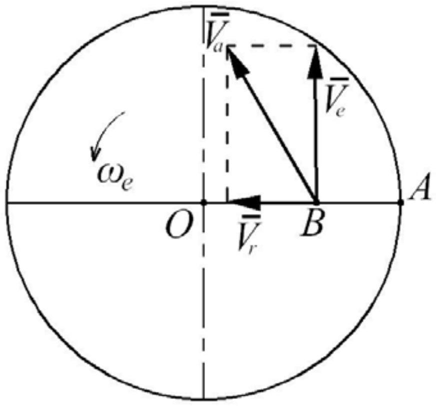


Рис. 14.2

Применим теорему о сложении скоростей на примере движения упомянутой мухи. На рис. 14.2 покажем пластинку (вид сверху) и муху в т. B. Допустим, закон относительного движения мухи задан уравнением

$$S_r = f(t), \text{ м.}$$

Напомним, что относительное движение мухи – ее движение по отношению к пластинке. Траектория относительного движения – отрезок AO. Предположим, в момент времени $t = t_1$ муха оказалась в т. B. Тогда расстояние

$$AB = S_{r1} = f(t_1), \text{ м.}$$

Относительная скорость мухи в общем случае равна

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = \dot{S}_r, \text{ м/с.}$$

Направлен вектор $\vec{V_r}$ от точки B к точке O.

Переносная скорость мухи – это скорость той точки пластинки, в которой в данный момент времени находится муха, т.е. скорость т. B пластинки. Скорость точки вращающегося твердого тела равна

$$V_e = \omega_e \cdot OB, \text{ м/с.}$$

где: ω_e - угловая скорость переносного движения (для нашего случая это угловая скорость вращения пластинки), с$^{-1}$;

OB - кратчайшее расстояние от точки B до оси вращения пластинки, м.

Вектор $\vec{V_e}$ направлен перпендикулярно OB в сторону угловой скорости ω_e (см. рис. 14.2).

Абсолютная скорость мухи по модулю равна (учитываем, что угол между $\vec{V_r}$ и $\vec{V_e}$ равен 90^0):

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2}, \text{ м/с.}$$

Направление вектора $\vec{V}_a$ показано на рис. 14.2.

Если же угол между векторами $\vec{V}_r$ и $\vec{V}_e$ $\alpha \neq 90^0$, то модуль абсолютной скорости точки вычисляется по формуле:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2 \cdot V_r \cdot V_e \cdot \cos\alpha}, \text{ м/с.}$$

14.2. Теорема о сложении ускорений.

14.2.1. Сложение ускорений при поступательном переносном движении.

При поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_r + \vec{a}_e, \tag{14.1}$$

где: $\vec{a}_r$ - относительное ускорение точки, м/с^2.

$\vec{a}_e$ - переносное ускорение точки, м/с^2.

Задача. Клин, движущийся горизонтально с ускорением a_1, перемещает вдоль вертикальных направляющих стержень *AB* (рис. 14.3). Определить ускорение стержня, если угол клина равен α.

Решение. Абсолютное ускорение $\vec{a}_A$ точки *A* стержня направлено по вертикали вверх. Его можно рассматривать как слагающееся из относительного ускорения $\vec{a}_r$, направленного вдоль щеки клина, и переносного ускорения $\vec{a}_e$, равного ускорению клина $\vec{a}_1$ (так как переносное движение, т.е. движение клина, является при этом поступательным). Строим соответствующий параллелограмм и учитывая, что $\vec{a}_e = \vec{a}_1$, находим:

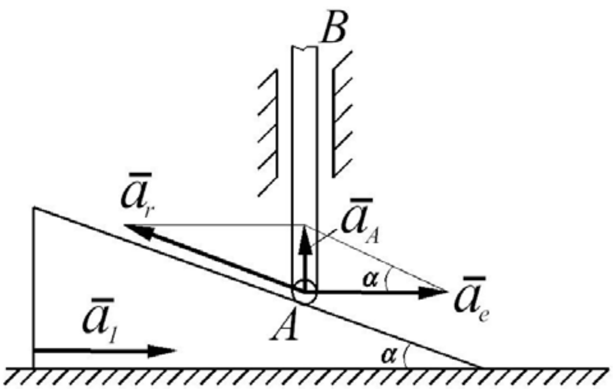


Рис. 14.3

$$a_a = a_1 tg\alpha.$$

Величина a_a и определяет ускорение стержня.

14.2.2. Сложение ускорений при непоступательном переносном движении. Теорема Кориолиса.

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительном, характеризующего изменение относительной скорости в относительном движении; переносного, характеризующего изменение переносной скорости точки в переносном движении, и кориолиса, характеризующего изменение относительной скорости точки в переносном движении и переносной скорости точки в относительном движении:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k, \tag{14.2}$$

где: $\vec{a}_r$ - относительное ускорение точки, м/с^2;

$\vec{a}_e$ - переносное ускорение точки, м/с^2;

$\vec{a}_k$ - ускорение Кориолиса, м/с^2.

В общем случае относительное и переносное ускорения точки складываются из нормального и касательного ускорений, т.е.

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} \quad \text{и} \quad \vec{a}_e = \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau}. \tag{14.3}$$

Тогда уравнение (14.2) с учетом (14.3) примет вид:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n} + \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_k.$$

14.2.3. Вычисление относительного, переносного и кориолисова ускорения.

Относительное ускорение точки, при заданном законе относительного движения $S_r = f(t)$, вычисляется по известным формулам кинематики точки:

$$a_r = \sqrt{\left(a_r^n\right)^2 + \left(a_r^\tau\right)^2}.$$

Относительное нормальное ускорение:

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho}, \text{ м/с}^2.$$

где: V_r - относительная скорость точки, м/с;

ρ - радиус кривизны траектории, м.

Относительное касательное ускорение

$$a_r^\tau = \frac{d^2 S_r}{dt^2} = \frac{dV_r}{dt}, \text{ м/с}^2.$$

Как уже установлено, переносное ускорение точки равно ускорению той точки твердого тела, в которой в данный момент времени находится рассматриваемая точка. Другими словами, переносное ускорение определяется методами кинематики твердого тела. Переносное ускорение равно геометрической сумме переносных нормального и касательного ускорений точки. Переносное нормальное ускорение точки равно:

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot h, \text{ м/с}^2.$$

где: ω_e - угловая скорость переносного вращения, с$^{-1}$;

h – кратчайшее расстояние от рассматриваемой точки до оси вращения твердого тела, м.

Переносное касательное ускорение определяется по формуле:

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot h, \text{ м/с}^2.$$

где: ε_e - угловое ускорение переносного вращения, с$^{-2}$.

Кориолисово ускорение в векторном виде равно:

$$\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r), \text{ м/с}^2. \qquad (14.4)$$

Таким образом, <u>кориолисово ускорение точки равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки</u>. Если угол между векторами $\vec{V}_r$ и $\vec{\omega}_e$ обозначить α, то по модулю кориолисово ускорение равно:

$$a_k = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin\alpha, \text{ м/с}^2. \qquad (14.5)$$

Направлен вектор $\vec{a}_k$ так же, как вектор $\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$, т.е. перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$ в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\vec{\omega}_e$ с $\vec{V}_r$ видим происходящим против хода часовой стрелки.

Для определения направления кориолисова ускорения удобно пользоваться правилом Жуковского: <u>чтобы найти направление кориолисова ускорения, следует спроектировать относительную скорость точки на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, и повернуть эту проекцию в той же плоскости на 90^0 в сторону переносного вращения.</u>

Воспользуемся правилом Жуковского для определения кориолисова ускорения «мухи» (рис. 14.4, вид сверху). Относительная скорость мухи $\vec{V}_r$ направлена от точки B к точке O и уже лежит в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения. Поворачиваем вектор $\vec{V}_r$ в этой плоскости на 90^0 в сторону переносного вращения (по направлению ω_e). Получаем вектор кориолисова ускорения мухи $\vec{a}_k$.

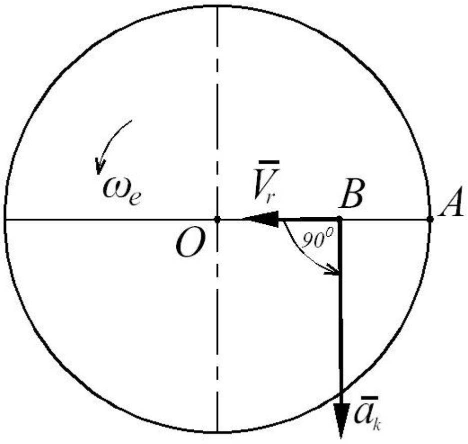


Рис. 14.4

Из формулы (14.5) видно, что кориолисово ускорение может обращаться в ноль в следующих случаях:

1) Когда $\omega_e = 0$, т.е. когда *<u>переносное движение является поступательным</u>* или если угловая скорость переносного вращения в данный момент времени равна нулю.

2) Когда $V_r = 0$, т.е. когда относительная скорость в данный момент времени обращается в ноль.

3) Когда α = 0 или α = 180^0, т.е. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения, или если в данный момент времени вектор $\vec{V}_r$ параллелен этой оси.

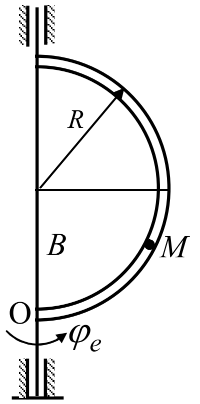
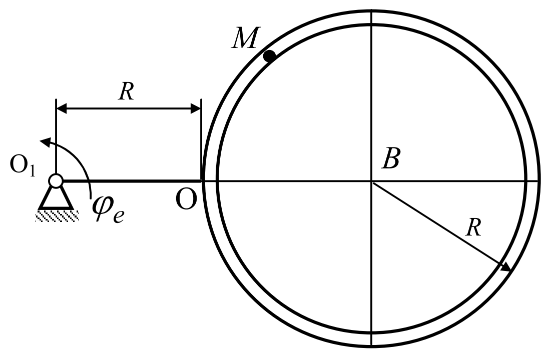
15. Задание К4. Сложное движение точки. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки.

Точка M движется относительно тела B (рис. К4.1). По заданным уравнениям относительного движения точки M и движения тела B (таблица К4-1) определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Указание: схему на рис. К4.1 выбирать в соответствии с последней цифрой шифра.

Таблица К4-1

Предпоследняя цифра шифра	**φ_e, рад**	$S_r = \overset{\cup}{OM}$, см	R, см	t_1, с
1	t^2	πt^2	12	2
2	$t^2 + t$	$1{,}5\pi t^2$	18	2
3	$2t^2 - 2t$	$2\pi t^2$	24	2
4	$1{,}5t^2$	$2{,}5\pi t^2$	30	2
5	$2t^2$	$3\pi t^2$	18	1
6	$2{,}5t^2$	$4\pi t^2$	24	2
7	$2{,}5t^2 - 2t$	$5\pi t^2$	30	2
8	$3t^2 - 4t$	$6\pi t^2$	18	1
9	$1{,}5t^2 - t$	$8\pi t^2$	16	1
0	$0{,}5t^2 + t$	$10\pi t^2$	30	1

варіант		*варіант*	
1		*2*	

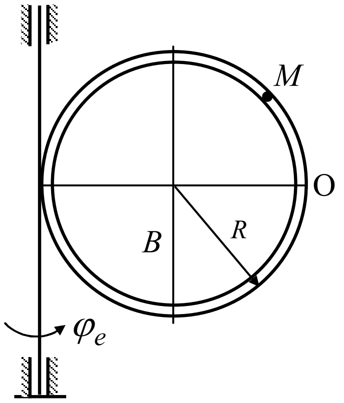
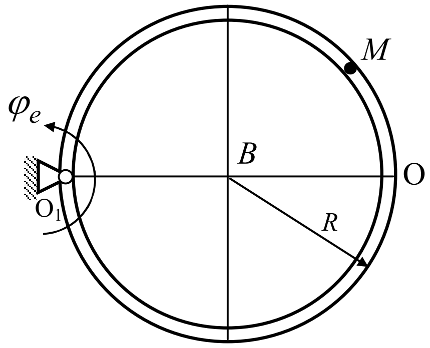
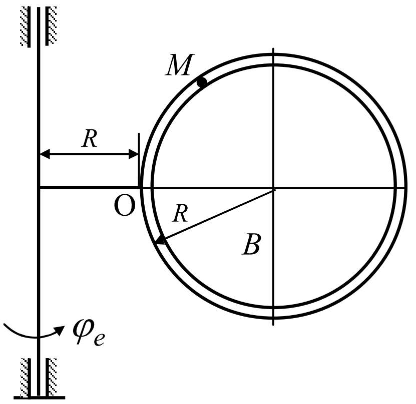
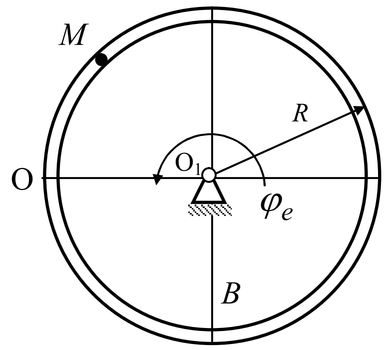
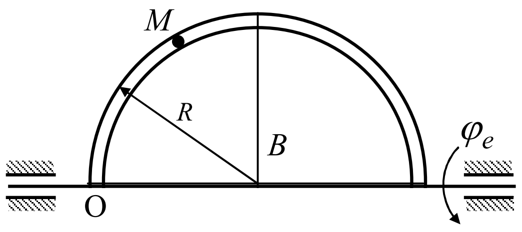
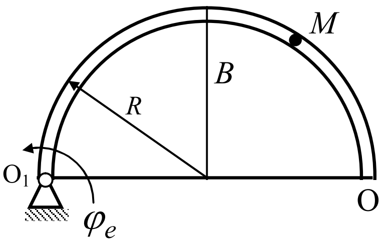
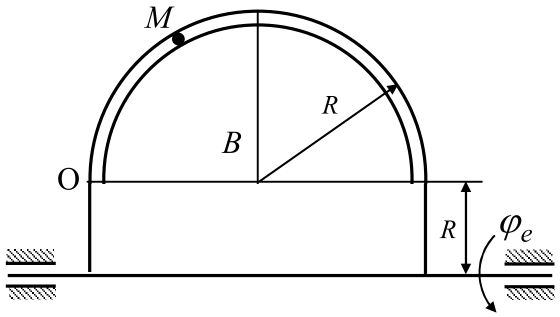
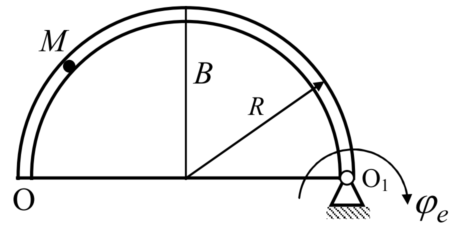
3		*4*	
5		*6*	
7		*8*	
9		*0*	

Рис. К4.1

16. Пример выполнения задания К4.

Условие задачи: Точка M движется относительно тела B (рис. 16.1). По заданным уравнениям относительного движения точки M $S_r = \overset{\cup}{AM} = 12\pi t^2 + \pi t$ (см) и движения тела B $\varphi_e = 5t^2 + 2t - 3$ (рад) определить для момента времени $t = t_1 = 2$ с абсолютную скорость и абсолютное ускорение т. M, если $R = 100$ см, $OO_1 = 0{,}5R$.

Дано: $S_r = \overset{\cup}{AM} = 12\pi t^2 + \pi t$, см; $\varphi_e = 5t^2 + 2t - 3$, рад; $t = t_1 = 2$ с;

$R = 100$ см, $OO_1 = 0{,}5R$.

Найти: V_M - ? a_M - ?

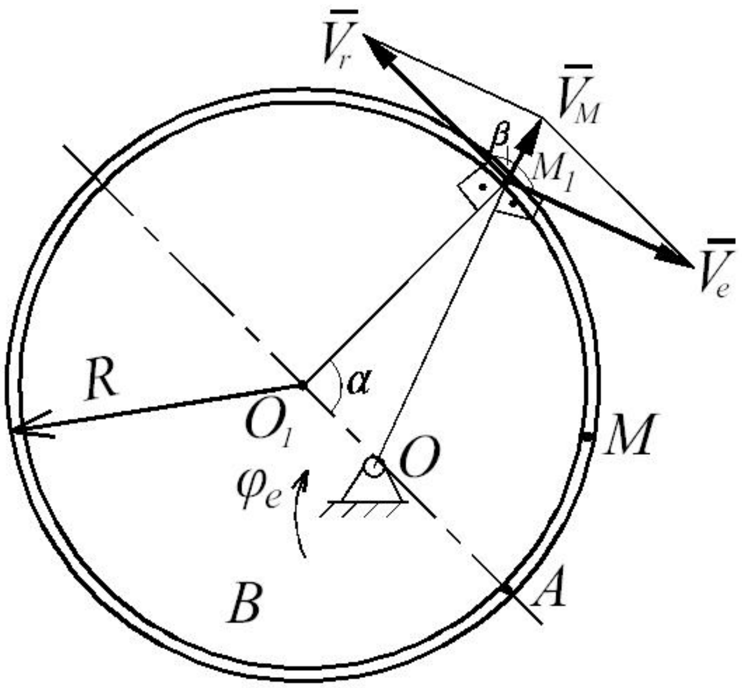


Рис. 16.1

Решение.

Точка M совершает сложное движение. Относительное движение точки M – движение по окружности радиуса R по закону $S_r = \overset{\cup}{AM} = 12\pi t^2 + \pi t$ (см). Переносное движение – движение точки вращающегося тела B, в которой в данный момент времени $t = t_1$ находится точка M, относительно оси O.

1. Определим положение т. M при $t = t_1 = 2$ с:

$$S_r = \overset{\cup}{OM_1} = 12\pi t_1^2 + \pi t_1 = 12\pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 2 = 50\pi, \text{ см.}$$

Угол α (см. рис. 16.1) равен:

$$\alpha = \frac{S_r}{R} = \frac{50\pi}{100} = \frac{\pi}{2}, \text{ рад.}$$

На рис. 16.1 показываем точку *M* при $t = t_1$ - точка *M* занимает положение M_1.

2. Определение абсолютной скорости точки.

Абсолютная скорость точки *M* равна геометрической сумме скоростей относительной и переносной:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_r + \vec{V}_e.$$

Относительная скорость т. *M*:

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = 24\pi t + \pi, \text{ см/с.}$$

При $t = t_1$ относительная скорость точки равна:

$$V_r = 24\pi t_1 + \pi = 24\pi \cdot 2 + \pi = 49\pi, \text{ см/с.}$$

Вектор $\vec{V}_r$ показываем на рис. 16.1.

Переносная скорость точки *M*:

$$V_e = \omega_e \cdot OM_1, \text{ см/с.}$$

Угловая скорость переносного вращения:

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e = 10t + 2, \text{ с}^{-1}.$$

При $t = t_1$ угловая скорость переносного вращения равна:

$$\omega_e = 10t_1 + 2 = 10 \cdot 2 + 2 = 22, \text{ с}^{-1}.$$

Определим расстояние OM_1:

$$OM_1 = \sqrt{(O_1M_1)^2 + (OO_1)^2} = \sqrt{R^2 + (0{,}5R)^2} = \sqrt{100^2 + 50^2} = 119 \text{ см.}$$

Таким образом, переносная скорость равна:

$$V_e = 22 \cdot 119 = 2620 \text{ см/с.}$$

Вектор $\vec{V}_e$ показываем на рис. 16.1.

Найдем угол β между векторами $\vec{V_r}$ и $\vec{V_e}$. Из построения следует, что

$$\beta = 180^0 - \angle OM_1O_1.$$

Синус $\angle OM_1O_1$ равен:

$$\sin(\angle OM_1O_1) = \frac{OO_1}{OM_1} = \frac{50}{119} = 0{,}42.$$

Следовательно, $\angle OM_1O_1 = 25^0$, и

$$\beta = 180^0 - 25^0 = 155^0.$$

Модуль абсолютной скорости точки *M* равен:

$$V_M = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2 \cdot V_r \cdot V_e \cdot \cos\beta} =$$

$$= \sqrt{(49\pi)^2 + 2620^2 + 2 \cdot 49\pi \cdot 2620 \cdot (-0{,}91)} = 2480 \text{ см/с}.$$

Показываем вектор $\vec{V_M}$ на рис. 16.1.

3. Определение абсолютного ускорения т. *M*.

Абсолютное ускорение т. *M* найдем по теореме Кориолиса:

$$\vec{a_M} = \vec{a_r^n} + \vec{a_r^\tau} + \vec{a_e^n} + \vec{a_e^\tau} + \vec{a_k}. \tag{16.1}$$

Относительное нормальное ускорение:

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} = \frac{(49\pi)^2}{100} = 237 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a_r^n}$ показываем на рис. 16.2.

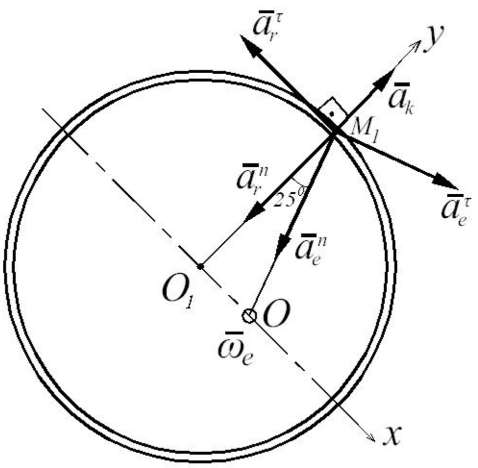


Рис. 16.2.

Относительное касательное ускорение:

$$a_r^\tau = \frac{d^2 S_r}{dt^2} = 24\pi, \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_r^\tau$ строим на рис. 16.2.

Переносное нормальное ускорение равно:

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM_1 = 22^2 \cdot 119 = 57600 \text{ см/с}^2.$$

Переносное касательное ускорение:

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot OM_1 = \ddot{\varphi}_e \cdot OM_1 = 10 \cdot 119 = 1190 \text{ см/с}^2.$$

Кориолисово ускорение:

$$a_k = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r \cdot \sin 90^0 = 2 \cdot 22 \cdot 49\pi \cdot 1 = 6770 \text{ см/с}^2.$$

Направление $\vec{a}_k$ определяем при помощи правила Жуковского. При этом учли, что угол между $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$ равен 90^0.

Выберем систему координат $XO_1У$ и спроектируем векторное уравнение (16.1) на оси X и $У$:

$$a_x = -a_r^\tau + a_e^n \cdot \sin 25^0 + a_e^\tau \cos 25^0 = -24\pi + 57600 \cdot 0{,}42 + 1190 \cdot 0{,}91 = 25200 \text{ см/с}^2.$$

$$a_y = -a_r^n - a_e^n \cdot \cos 25^0 + a_e^\tau \sin 25^0 + a_k =$$

$$= -237 - 57600 \cdot 0{,}91 + 1190 \cdot 0{,}42 + 6770 = -45400 \text{ см/с}^2.$$

Таким образом, модуль абсолютного ускорения т. M равен:

$$a_M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(25200)^2 + (-45400)^2} = 51900 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $V_M = 2480$ см/с; $a_M = 51900$ см/с^2.

Литература

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М., 1985 г.
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Часть 1. М., 1984 г.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. М., 1984 г.
4. Павловский М.А., Путята Т.В. Теоретическая механика. Киев, 1985 г.
5. Мущанов В.П., Лук’янець О.Г., Євдокімов А.І. Методичний посібник з теоретичної механіки для виконання розрахунково-графічних робіт №1 і №2, розділи «Статика» і «Кінематика точки». – Макіївка: ДонНАБА, 2008. – 41с.