МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ И КОНТРОЛЬНЫХ

РАБОТ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

РАЗДЕЛ «СТАТИКА»

МАКЕЕВКА - 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ

Кафедра «Теоретической и прикладной механики»

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

РАЗДЕЛ «СТАТИКА»

Рекомендовано для студентов по направлениям
«Строительство» и «Инженерная механика»

Утверждено
на учебно-методическом Совете
Протокол № 12
от 02.03.2010 г.

Рассмотрено и утверждено
на заседании кафедры
«Теоретической и прикладной
механики»
Протокол № 1 от 29.01.2010 г.

Макеевка-2010

к оглавлению

УДК 378.14

Задания и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ. Раздел «Статика»//Мущанов В.Ф., Евдокимов А.И., Стифеев Ф.Ф., Фоменко С.А. - Макеевка: ДонНАСА, 2010, - 70 стр.

Задания и методические указания для выполнения расчетно-графических и контрольных работ по статике предназначены для студентов всех специальностей, обучающихся в строительных институтах. Могут быть использованы как при подготовке к модульному контролю студентов дневной формы обучения, так и в учебном процессе по теоретической механике на заочном факультете. Содержат задания по 9 темам статики, краткие сведения по теории и примеры решения задач.

Составители: В.Ф. Мущанов, профессор, д.т.н.,
А.И. Евдокимов, доцент, к.т.н.,
Ф.Ф. Стифеев, доцент, к.т.н.,
С.А. Фоменко, преподаватель-стажер

Отв. за выпуск Ф.Ф.Стифеев, доцент, к.т.н.

СОДЕРЖАНИЕ

к оглавлению

1. ВВЕДЕНИЕ

Для успешного изучения теоретической механики требуется не только глубокое изучение теории, но и приобретение навыков в решении задач. Необходимо научиться самостоятельно схематизировать механические явления и уметь конкретные физические задачи облекать в абстрактную математическую форму.

Для изучения статики необходимо уметь свободно оперировать тригонометрическими функциями и решать прямоугольные треугольники, знать теорему синусов и теорему о квадрате стороны косоугольного треугольника, из аналитической геометрии – систему декартовых координат на плоскости и в пространстве; по векторной алгебре – сложение и вычитание векторов, теорию проекций, разложение вектора по координатным осям, скалярное и векторное умножение и основные свойства скалярного и векторного произведений.

Студенты дневной формы обучения (стационар) выполняют расчетно-графическую, а студенты заочного факультета – контрольную работы. Задания, входящие в расчетно-графическую работу (в дальнейшем - РГР) и контрольную работу (в дальнейшем - КР), выдает лектор на основании рабочей учебной программы по соответствующей специальности.

Задания и методические указания содержат задачи по девяти темам раздела «Статика».

Набор вариантов индивидуальных заданий, входящих в РГР или КР, студент выбирает из таблиц и рисунков к соответствующим заданиям с помощью букв **а** и **б,** определяемых двумя последними цифрами зачетной книжки. Например: если номер зачетной книжки (шифр) 09/165, то двум последним цифрам присваиваются значения: **а = 6, б = 5**. Буквы шифра **а** и **б** указывают, какую расчетную схему выбрать из рисунка и какие параметры следует взять из соответствующей таблицы.

Предлагаемые в каждом задании задачи имеют примерно одинаковую сложность. Таким образом, каждое задание включает 100 равных по сложности задач.

В методических указаниях приводятся примеры выполнения заданий. Основываясь на этих примерах, студенты (особенно заочных факультетов) смогут самостоятельно выполнять задания РГР или КР.

2. ТРЕБОВАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ РГР И КР

При выполнении заданий РГР или КР необходимо придерживаться следующих требований:

- все задания выбирать и выполнять в соответствии с номером зачетной книжки (шифром) студента. В противном случае задания возвращаются без проверки и РГР или КР считается не зачтенной;
- студенты **стационара** выполняют задания на стандартных листах бумаги (формат А4) с одной стороны с оставлением полей: 25…30 мм слева и 15…20 мм справа, снизу и сверху. На титульном листе указываются номер РГР и темы задач, шифр, группа и ФИО студента (образец заполнения титульного листа РГР №1 прилагается);
- студенты **заочного факультета** выполняют КР в стандартных школьных тетрадях в клетку. На титульной странице указываются: номер КР, шифр, группа и ФИО студента;
- решение каждой задачи начинается с верхней части листа (страницы): указывается номер задачи, ее тема, записывается условие в кратком виде и что в этой задаче требуется найти (определить). Потом изображается рисунок, который выполняется в строгом соответствии с условием задачи, при этом геометрические и силовые параметры должны отвечать этим условиям. Рисунок должен быть аккуратным и четким, выполненным при помощи чертежных приспособлений карандашом в выбранном студентом масштабе. Необходимо обязательно показать все векторы сил и нагрузок, моменты сил, линейные размеры, углы наклона, оси координат;

ДОНБАСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Кафедра **«Теоретична та прикладна механіка»**

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 1

СТАТИКА

С- 8 Визначення реакцій опор і зусиль в стержнях плоскої ферми

С- 5 Визначення реакцій опор складеної конструкції (система двох тіл)

С- 6 Рівновага сил з урахуванням зчеплення (тертя спокою)

Варіант №_________________

Виконав студент групи __

____

Перевірив_________________

Макіївка 2010

- решение задач должно сопровождаться краткими пояснениями, т.е. с указанием какие теоремы, формулы или уравнения используются при решении данного задания или какой-то его части;
- рекомендуется задачи решать в общем виде, а в конце, подставляя числовые значения величин, получить искомый результат. Вычисление неизвестных следует выполнять по правилу округления с точностью до трех значащих цифр. При решении задач следует проверять соответствие размерности левой и правой частей уравнений.

Нагрузки, значения которых для Вашего варианта по условию задачи равны нулю, на чертежах не показывать.

Решать и сдавать РГР или КР необходимо в сроки, установленные рабочей учебной программой. РГР, выполненные с ошибками, или не зачтенные КР, возвращаются студентам для исправления (полностью или частично). Исправления выполняются на отдельных листах или страницах, которые подшиваются к работе. После этого работа сдается на повторную проверку.

Расчетно-графические работы студенты защищают перед ведущими занятия преподавателями в сроки согласно рабочей учебной программе.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИКИ (краткая методика).

Решаемые методами статики задачи могут быть одного из двух следующих типов:

1) задачи, в которых известны (полностью или частично) действующие на тело силы и требуется найти, в каком положении или при каких соотношениях между действующими силами тело будет в равновесии;

2) задачи, в которых известно, что тело заведомо находится в равновесии, и требуется найти, чему равны при этом все или некоторые из действующих на тело сил.

Реакции связей являются величинами, наперед неизвестными во всех задачах статики.

При инженерных расчетах в результате решения задач статики определяются условия равновесия конструкции (если она не закреплена наложенными связями жестко), а также давления на опоры или усилия в тех или иных частях конструкции при ее равновесии. Так как рассматриваемая конструкция, как правило, представляет собой совокупность ряда связанных друг с другом тел, то, приступая к решению конкретной задачи надо, прежде всего, *установить, равновесие какого именно тела следует рассмотреть, чтобы найти искомые величины.*

Весь процесс решения задач сводится к следующим операциям:

1. *Выбор тела, равновесие которого должно быть рассмотрено.* Для решения задачи надо рассмотреть равновесие тела, к которому приложены заданные и искомые силы. Если заданные силы приложены к одному телу, а искомые к другому, может оказаться необходимым рассмотреть последовательно равновесие каждого тела в отдельности, а иногда и равновесие промежуточных тел.
2. *Установление связей*, т.е. выявление всех тел, предметов, частей конструкции, которые препятствуют перемещению в плоскости или в пространстве рассматриваемого тела.
3. *Освобождение рассматриваемого тела от связей и изображение действующих на него заданных сил и реакций связей.* Тело, освобожденное от связей, желательно изображать на отдельном рисунке. Также, на этом этапе следует *выбрать систему координат.* Если действующие на тело заданные силы и силы реакций лежат в одной плоскости, выбираем *плоскую систему отсчета.* Если действующие на тело силы имеют пространственную ориентацию, то следует *выбрать пространственную систему координат.*
4. *Составление уравнений равновесия.* Вид уравнений равновесия зависит от того, какая система сил (сходящаяся, плоская или пространственная) действует на рассматриваемое тело.

При решении задач “плоской” статики рекомендуется для получения более простых уравнений равновесия:

а) составляя уравнение проекций, выбирать координатную ось перпендикулярно какой-нибудь неизвестной силе;
б) составляя уравнение моментов, выбрать центр (точку) моментов в точке, где пересекается большее количество неизвестных сил.

При решении задач “пространственной” статики в случаях, когда из общего чертежа трудно усмотреть, чему равен момент данной силы относительно какой-нибудь оси, рекомендуется изобразить на вспомогательном рисунке *проекцию рассматриваемого тела вместе с действующими нагрузками на плоскость, перпендикулярную к этой оси.* В тех случаях, когда при вычислении момента возникают затруднения в определении проекции силы на соответствующую плоскость или в вычислении плеча этой проекции, рекомендуется разложить силу на две взаимно перпендикулярные составляющие (из которых одна параллельна какой-нибудь координатной оси), а затем воспользоваться теоремой Вариньона.

4. ЗАДАНИЕ С1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ ГРАФИЧЕСКИМ И АНАЛИТИЧЕСКИМ СПОСОБАМИ.

Положение вектора силы $\vec{F_1}$ в плоской декартовой системе координат ХОУ задано точками: А – начало вектора с координатами ($X_A;У_A$) и В – конец вектора с координатами ($X_B;У_B$), которые указаны в таблице С1-1. К точке А также приложена сила $\vec{F_2}$, проекции которой на оси координат равны F_{2x} и F_{2y} и представлены в таблице С1-2.

Требуется: 1) построить в выбранном масштабе векторы сил $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$;

2) вычислить модули сил $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$;

3) построить равнодействующую $\vec{R}$ этих сил, определить ее модуль и угол наклона к оси абсцисс;

4) найти по модулю и направлению силу $\vec{F_3} = \vec{F_1} - \vec{F_2}$.

Таблица С1-1

Цифра шифра "б"	X_A, Н	$У_A$, Н	X_B, Н	$У_B$, Н
0	-2	6	4	4
1	3	-4	3	3
2	7	2	5	6
3	-3	5	2	7
4	-4	-5	1	8
5	6	-1	7	2
6	5	-7	6	3
7	3	-4	5	4
8	-1	8	4	3
9	-4	3	3	5

Таблица С1-2

Цифра шифра "а"	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_{2x}, Н	-5	-4	6	7	-3	-4	7	6	-4	5
F_{2y}, Н	5	6	-4	-3	4	5	-3	-2	5	-3

Методические указания к решению задачи

Для решения задачи С1 студент должен знать и уметь:

1) Построить плоскую систему координат в соответствующем масштабе. Масштаб выбирается таким, чтобы на рисунке были четко изображены все силы, как заданные ($\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$), так и искомые ($\vec{R}$ и $\vec{F_3}$).

2) Определять длину вектора, т.е. его модуль, как длину отрезка по известным координатам его начала и конца по формуле:

$$F = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (У_B - У_A)^2}\ .$$

3) Находить проекции силы на координатные оси и находить силу через ее проекции. Знать, чтобы найти, например, абсциссу вектора (или проекцию вектора на ось абсцисс), надо из абсциссы конца вычесть абсциссу начала вектора. Вычислять модуль силы, зная проекции силы на координатные оси по формуле:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

4) Вычислять углы α и β между положительными направлениями оси абсцисс и оси ординат с вектором силы. Для этого нужно воспользоваться формулами:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}; \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{F}.$$

Естественно: $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Эти косинусы называются **направляющими косинусами вектора силы $\vec{F}$.**

5) Находить угол φ между векторами $\vec{F}_1(F_{1x};F_{1y})$ и $\vec{F}_2(F_{2x};F_{2y})$ по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2}{\left|\vec{F}_1\right| \cdot \left|\vec{F}_2\right|} = \frac{F_{1x} \cdot F_{2x} + F_{1y} \cdot F_{2y}}{\sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} \cdot \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2}}$$

6) Определять модуль искомого вектора силы $\vec{F}_3$ по теореме косинусов, т.е.:

$$F_3 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\varphi}\ .$$

Пример решения задачи С1. Дано: $X_A = -5H; У_A = -3H; X_B = 4H; У_B = 6H;$ $F_{2x} = -3H; F_{2y} = 5H.$

Решение

1) Изображаем плоскую систему координат ХОУ (рис. С1а). Выбираем масштаб: в 1см 2Н. Показываем точки А и В. Строим

вектор силы $\vec{F}_1$. Из точки А откладываем проекции $F_{2x}\, и\, F_{2y}$ силы $\vec{F}_2$. Строим вектор силы $\vec{F}_2$.

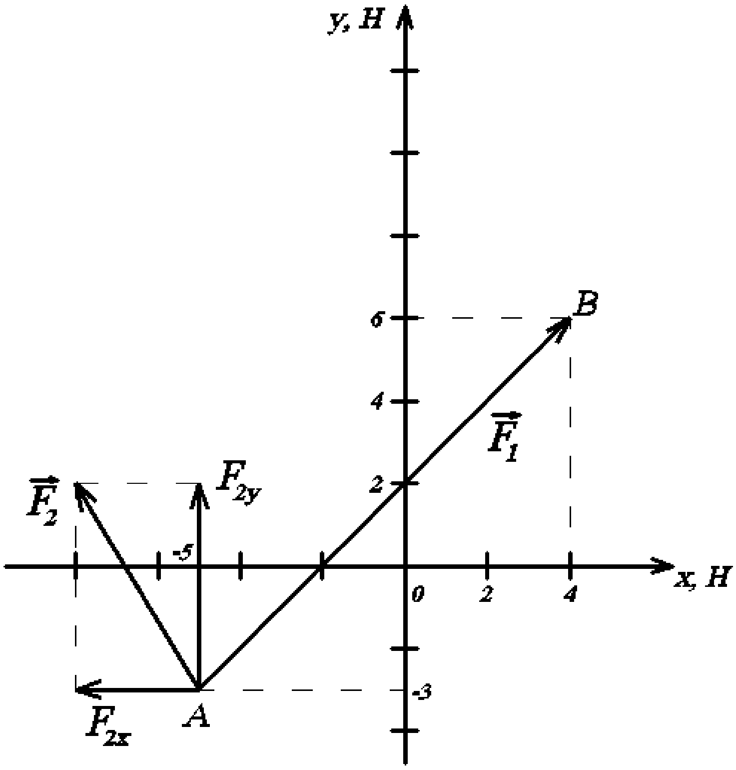


Рис. С1а

2) Находим модуль силы $\vec{F}_1$:

$$F_1 = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (У_B - У_A)^2} = \sqrt{[4-(-5)]^2 + [6-(-3)]^2} = 12{,}7H.$$

3) Находим модуль силы $\vec{F}_2$:

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = 5{,}83H.$$

4) Равнодействующая равна геометрической сумме сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

4.1) Первый способ нахождения равнодействующей через ее проекции, т.е.:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} .$$

Проекции равнодействующей на ось x и y равны:

$$R_x = \sum F_{ix}; \qquad R_y = \sum F_{iy} .$$

Проекции на оси координат силы $\vec{F}_2$ известны по условию задачи. Найдем проекции силы $\vec{F}_1$ на оси x и y:

$$F_{1x} = X_B - X_A = 4 - (-5) = 9H;$$

$$F_{1y} = У_B - У_A = 6 - (-3) = 9H;$$

Таким образом (с учетом знаков проекций):

$$R_x = \sum F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} = 9 - 3 = 6H.$$

$$R_y = \sum F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} = 9 + 5 = 14H.$$

На рис. С1б показываем проекции равнодействующей $R_x \, и \, R_y$, а затем и равнодействующую $\vec{R}$, модуль которой равен:

$$R = \sqrt{6^2 + 14^2} = 15{,}2H.$$

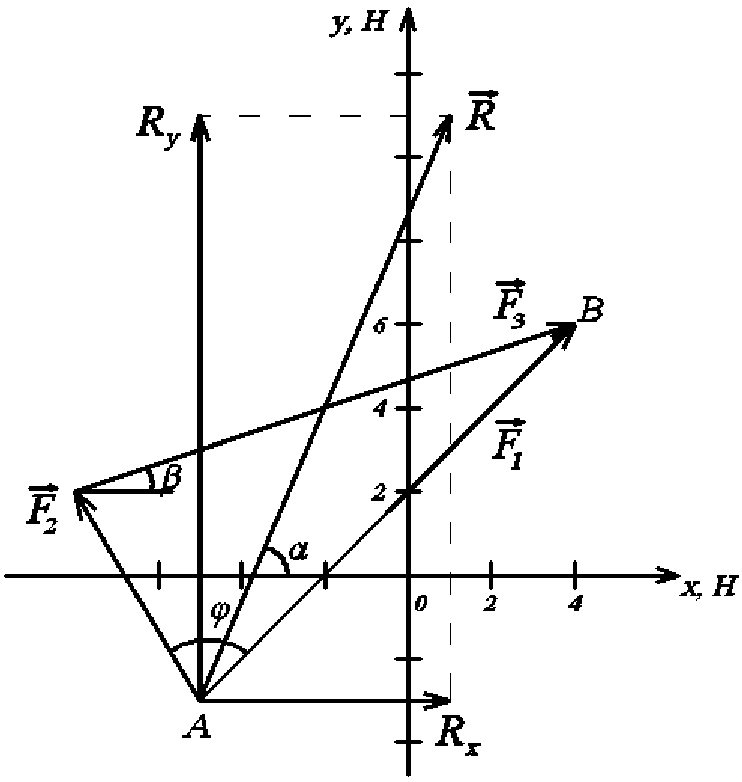


Рис. С1б

4.2) Второй способ. Находим $\vec{R}$ как диагональ параллелограмма, стороны которого $\vec{F}_1 \, и \, \vec{F}_2$. Для этого прежде определим косинус угла φ между векторами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$:

$$\cos\varphi = \frac{F_{1x} \cdot F_{2x} + F_{1y} \cdot F_{2y}}{|F_1| \cdot |F_2|} = \frac{9 \cdot (-3) + 9 \cdot 5}{12{,}7 \cdot 5{,}83} = 0{,}243.$$

Равнодействующую найдем по формуле:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\varphi} = \sqrt{12{,}7^2 + 5{,}83^2 + 2 \cdot 12{,}7 \cdot 5{,}83 \cdot 0{,}243} = 15{,}2H.$$

5) На рисунке показываем вектор $\vec{F}_3$ (учитывая, что по условию задачи $\vec{F}_3 = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$). Начало этого вектора необходимо отложить из конца вектора $\vec{F}_2$, а конец вектора $\vec{F}_3$ совмещаем с концом вектора $\vec{F}_1$ (рис. С1б).

Модуль силы F_3 находим по теореме косинусов:

$$F_3 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\varphi} = \sqrt{12{,}7^2 + 5{,}83^2 - 2 \cdot 12{,}7 \cdot 5{,}83 \cdot 0{,}243} = 12{,}6H.$$

Ответ: $F_1 = 12{,}7H$; $F_2 = 5{,}83H$; $R = 15{,}2H$; $F_3 = 12{,}6H$.

Примечание: При необходимости направляющие косинусы углов наклона α и β равнодействующей $\vec{R}$ и силы $\vec{F}_3$ к оси абсцисс находим следующим образом:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{6}{15{,}2} = 0{,}395.$$

Зная $\cos\alpha$, находим значение: α = 66°38$^{/}$.

Находим $\cos\beta = \dfrac{F_{3x}}{F_3} = \dfrac{|F_{1x}| + |F_{2x}|}{F_3} = \dfrac{9+3}{12{,}6} = 0{,}952.$

Таким образом, угол β = 17°50$^{/}$.

5. ЗАДАНИЕ С2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА И ГЛАВНОГО МОМЕНТА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

К параллелепипеду OABCDEKL (рис. С2а), стороны которого равны l_1, l_2 и l_3 приложены сосредоточенные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и линейная равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q. Размеры сторон, точки приложения сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, ребро, к которому приложена равномерно распределенная нагрузка и направление действия этой нагрузки указаны в таблице С2-1. Также в этой таблице дана точка параллелепипеда, к которой направлена сила $\vec{F}_2$. В таблице С2-2 приведены значения сил F_1 и F_2 и интенсивность q равномерно распределенной нагрузки.

Определить главный вектор R и главный момент M системы заданных сил.

Таблица С2-1

Цифра шифра “б”	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
l_1, м	1	2	3	4	3	2	1	2	3	4
l_2, м	2	1	2	2	2	4	2	1	4	3
l_3, м	2	3	1	3	4	3	3	4	1	2
Точка приложения силы $\vec{F}_1$	D	L	B	L	D	K	L	B	D	L
Точка приложения силы $\vec{F}_2$	K	D	L	K	B	L	A	L	K	B
Распределенная нагрузка приложена к ребру	BC	AB	DE	AO	KL	BC	DE	EK	AB	EK

Направление действия распределенной нагрузки	↓	↑	→	←	↓	↑	→	←	↓	↑
Точка, к которой направлена сила $\vec{F}_2$	A	C	E	A	D	C	K	E	A	E

Примечание: Указанное стрелкой направление действия равномерно распределенной нагрузки означает, что нагрузка действует:

- ↓ вертикально вниз;
- ↑ вертикально вверх;
- → горизонтально слева направо;
- ← горизонтально справа налево.

Таблица С2-2

Цифра шифра “а”	$\vec{\mathbf{F}}_1$, **Н**	**F_2, Н**	**q, Н/м**
0	$7\vec{i}+8\vec{j}-6\vec{k}$	6	2,5
1	$-4\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}$	7	3,0
2	$5\vec{i}-6\vec{j}+8\vec{k}$	8	3,5
3	$8\vec{i}-7\vec{j}-8\vec{k}$	9	4,0
4	$-9\vec{i}+4\vec{j}-7\vec{k}$	10	4,5
5	$4\vec{i}-6\vec{j}-5\vec{k}$	5	1,5
6	$6\vec{i}-9\vec{j}+4\vec{k}$	6	2,0
7	$7\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$	7	2,5
8	$-8\vec{i}-8\vec{j}-8\vec{k}$	8	3,0
9	$-2\vec{i}+7\vec{j}+7\vec{k}$	9	3,5

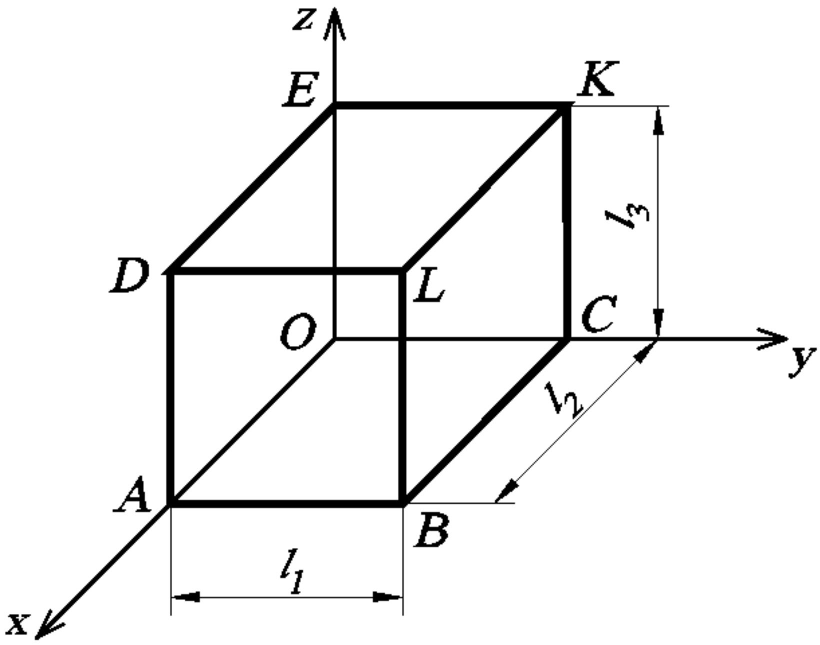


Рис. С2а

Для решения задачи С2 необходимо знать и уметь:

1. Вычислять проекции силы на координатные оси в случае задания силы через единичные векторы (орты осей). Например, если сила $\vec{F} = -A\,\vec{i} + B\,\vec{j} - C\,\vec{k}\;(H)$, то ее проекции равны: F_x = - A, Н; F_y = B, Н; F_z = - C, Н.

2. Определять модуль главного вектора через проекции сил на координатные оси:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},\ H,$$

где проекции главного вектора R_x, R_y и R_z равны алгебраической сумме всех действующих сил на соответствующие оси координат, т.е.:

$$R_x = \sum F_{ix},\quad R_y = \sum F_{iy},\quad R_z = \sum F_{iz}.$$

3. Находить направление главного вектора через направляющие косинусы:

$$\cos(\vec{R}\,\hat{;}\,\vec{i}) = \frac{R_x}{|R|};\quad \cos(\vec{R}\,\hat{;}\,\vec{j}) = \frac{R_y}{|R|};\quad \cos(\vec{R}\,\hat{;}\,\vec{k}) = \frac{R_z}{|R|}.$$

4. Вычислять проекции главного момента на координатные оси, как алгебраическую сумму моментов всех сил, приложенных к рассматриваемому телу, относительно соответствующей оси:

$$M_x = \sum M_x(\vec{F_i}),\quad M_y = \sum M_y(\vec{F_i})\ \ и\ \ M_z = \sum M_z(\vec{F_i}).$$

5. Определять модуль и направление главного момента по формулам:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

и

$$\cos(\vec{M}\hat{;}\,\vec{i}) = \frac{M_x}{|M|}; \quad \cos(\vec{M}\hat{;}\,\vec{j}) = \frac{M_y}{|M|}; \quad \cos(\vec{M}\hat{;}\,\vec{k}) = \frac{M_z}{|M|}.$$

6. Вычислять момент силы относительно точки: моментом силы относительно точки называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на плечо. Плечо силы – кратчайшее расстояние от рассматриваемой точки до линии действия силы.

Момент силы относительно точки имеет знак «плюс», если эта сила стремится повернуть тело вокруг рассматриваемой точки против хода часовой стрелки, и знак «минус» — если по ходу часовой стрелки.

Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через данную точку.

7. Находить момент силы относительно оси по правилу: моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную этой оси, относительно точки пересечения данных оси и плоскости. Момент имеет знак «плюс», если с положительного конца рассматриваемой оси мы видим, что сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки. В противном случае момент силы относительно данной оси имеет знак “минус”.

При вычислении момента силы относительно оси возможны следующие частные случаи:

1) Если сила параллельна оси, то ее момент относительно этой оси равен нулю.
2) Если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно данной оси равен нулю.

8. Вычислять момент силы при помощи теоремы Вариньона о моменте равнодействующей: момент равнодействующей относительно любого центра

равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно того же центра.

Пример решения задачи С2.

Дано: $l_1 = 3\,м$; $l_2 = 4\,м$; $l_3 = 5\,м$; $\vec{F_1} = -10\,\vec{i} + 12\,\vec{j} - 8\,\vec{k}$, Н; $F_2 = 8\,H$; $\vec{F_1}$ приложена к точке L; $\vec{F_2}$ приложена к точке B; $\vec{F_2}$ направлена от точки B к точке E; $q = 3{,}0\,H/м$; распределенная нагрузка приложена к ребру DE; направление нагрузки – “→”.

Найти: $\vec{R}$ и $\vec{M}$.

Решение.

1. Изображаем на рисунке (рис. С2б) параллелепипед OABCDEKL в соответствии с условием задачи. Выбираем систему координат OXYZ. Прикладываем к точке L проекции силы $\vec{F_1}$: $F_{1x} = -10\,H$; $F_{1y} = 12\,H$ и $F_{1z} = -8\,H$. . Показываем силу $\vec{F_2}$, приложенную к точке B и направленную от точки B к точке E. К ребру DE прикладываем равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q, направленную горизонтально слева направо.

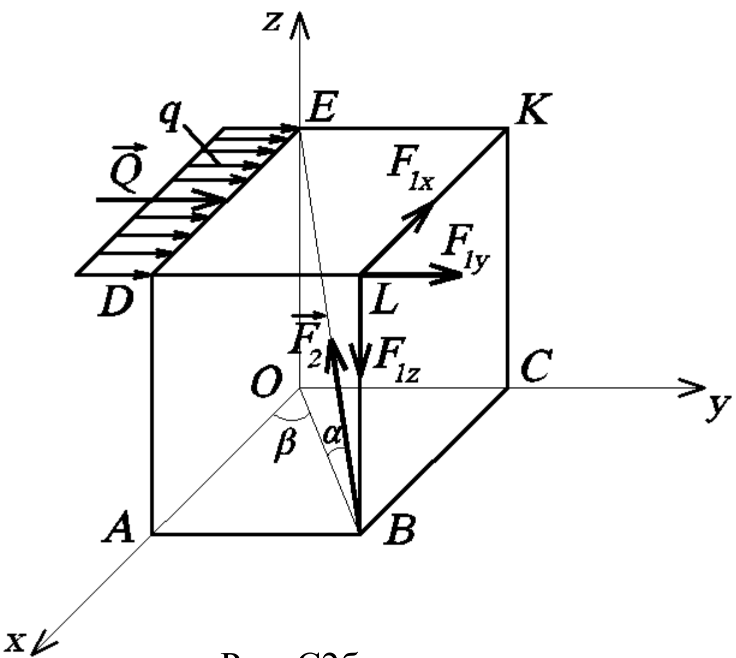


Рис. С2б

2. Заменяем равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой, равной $Q = q \cdot DE = 4q,\ H$. Сила $\vec{Q}$ направлена горизонтально и приложена к середине ребра DE (см. рисунок).

3. Вычисляем косинусы и синусы углов α и β, необходимые для определения проекций силы $\vec{F_2}$ на выбранную систему координат:

$$\cos\alpha = \frac{OB}{BE} = \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = 0{,}707\,.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - (0{,}707^2)} = 0{,}707\,.$$

$$\cos\beta = \frac{AO}{BO} = \frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0{,}8\,.$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - (0{,}8)^2} = 0{,}6\,.$$

4. Определяем проекции главного вектора на оси координат:

$$R_x = \sum F_{ix} = -F_{1x} - F_2\cos\alpha\cdot\cos\beta = -10 - 8\cdot 0{,}707\cdot 0{,}8 = -14{,}5\,H\,;$$

$$R_y = \sum F_{iy} = F_{1y} + Q - F_2\cos\alpha\cdot\sin\beta = 12 + 4\cdot 3{,}0 - 8\cdot 0{,}707\cdot 0{,}6 = 20{,}6\,H\,;$$

$$R_z = \sum F_{iz} = -F_{1z} + F_2\sin\alpha = -8 + 8\cdot 0{,}707 = -2{,}3\,H\,.$$

При нахождении проекции силы $\vec{F}_2$ на оси X и У пользуемся правилом двойного проектирования: вначале силу $\vec{F}_2$ проектируем на плоскость ХОУ, а затем эту проекцию проектируем на соответствующую координатную ось.

5. Находим главный вектор:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-14{,}5)^2 + (20{,}6)^2 + (-2{,}3)^2} \approx 25{,}3H\,.$$

6. Вычисляем направляющие косинусы главного вектора:

$$\cos(\vec{R}\,;\hat{\ }\,\vec{i}) = \frac{R_x}{R} = \frac{-14{,}5}{25{,}3} = -0{,}573;$$

$$\cos(\vec{R}\,;\hat{\ }\,\vec{j}) = \frac{R_y}{R} = \frac{20{,}6}{25{,}3} = 0{,}814;$$

$$\cos(\vec{R}\,;\hat{\ }\,\vec{k}) = \frac{R_z}{R} = \frac{-2{,}3}{25{,}3} = -0{,}091.$$

7. Определяем проекции главного момента относительно координатных осей:

$$M_x = \sum M_x(\vec{F}_i) = -F_{1z}\cdot l_1 - F_{1y}\cdot l_3 - Q\cdot l_3 + F_2\cdot\sin\alpha\cdot l_1 =$$
$$= -8\cdot 3 - 12\cdot 5 - 4\cdot 3{,}0\cdot 5 + 8\cdot 0{,}707\cdot 3 = -127\,H\cdot м;$$

$$M_y = \sum M_y(\vec{F}_i) = -F_{1x}\cdot l_3 + F_{1z}\cdot l_2 - F_2\cdot\sin\alpha\cdot l_2 = -10\cdot 5 + 8\cdot 4 - 8\cdot 0{,}707\cdot 4 = -40{,}6\,H\cdot м;$$

$$M_z = \sum M_z(\vec{F_i}) = F_{1x} \cdot l_1 + F_{1y} \cdot l_2 + Q \cdot \frac{l_2}{2} = 10 \cdot 3 + 12 \cdot 4 + 4 \cdot 3{,}0 \cdot \frac{4}{2} = 102\, H \cdot м.$$

При вычислении моментов сил относительно осей учитываем, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси и если линия действия силы пересекает рассматриваемую ось. Так, например, момент силы $\vec{F_2}$ относительно оси Z равен нулю потому, что линия действия силы $\vec{F_2}$ пересекает ось Z.

Определение знака момента проиллюстрируем на примере вычисления момента проекции F_{1x} относительно оси ОУ: наблюдая со стороны положительного конца оси ОУ, видим, что проекция F_{1x} стремиться повернуть параллелепипед относительно этой оси по ходу часовой стрелки, следовательно, знак момента проекции F_{1x} относительно оси ОУ отрицательный.

8. Находим главный момент:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-127)^2 + (-40{,}6)^2 + (102)^2} \approx 168\, H \cdot м.$$

9. Вычисляем направляющие косинусы главного момента:

$$\cos(\vec{M}\, ;\hat{}\, \vec{i}) = \frac{M_x}{M} = \frac{-127}{168} = -0{,}756;$$

$$\cos(\vec{M}\, ;\hat{}\, \vec{j}) = \frac{M_y}{M} = \frac{-40{,}6}{168} = -0{,}242;$$

$$\cos(\vec{M}\, ;\hat{}\, \vec{k}) = \frac{M_z}{M} = \frac{102}{168} = 0{,}607.$$

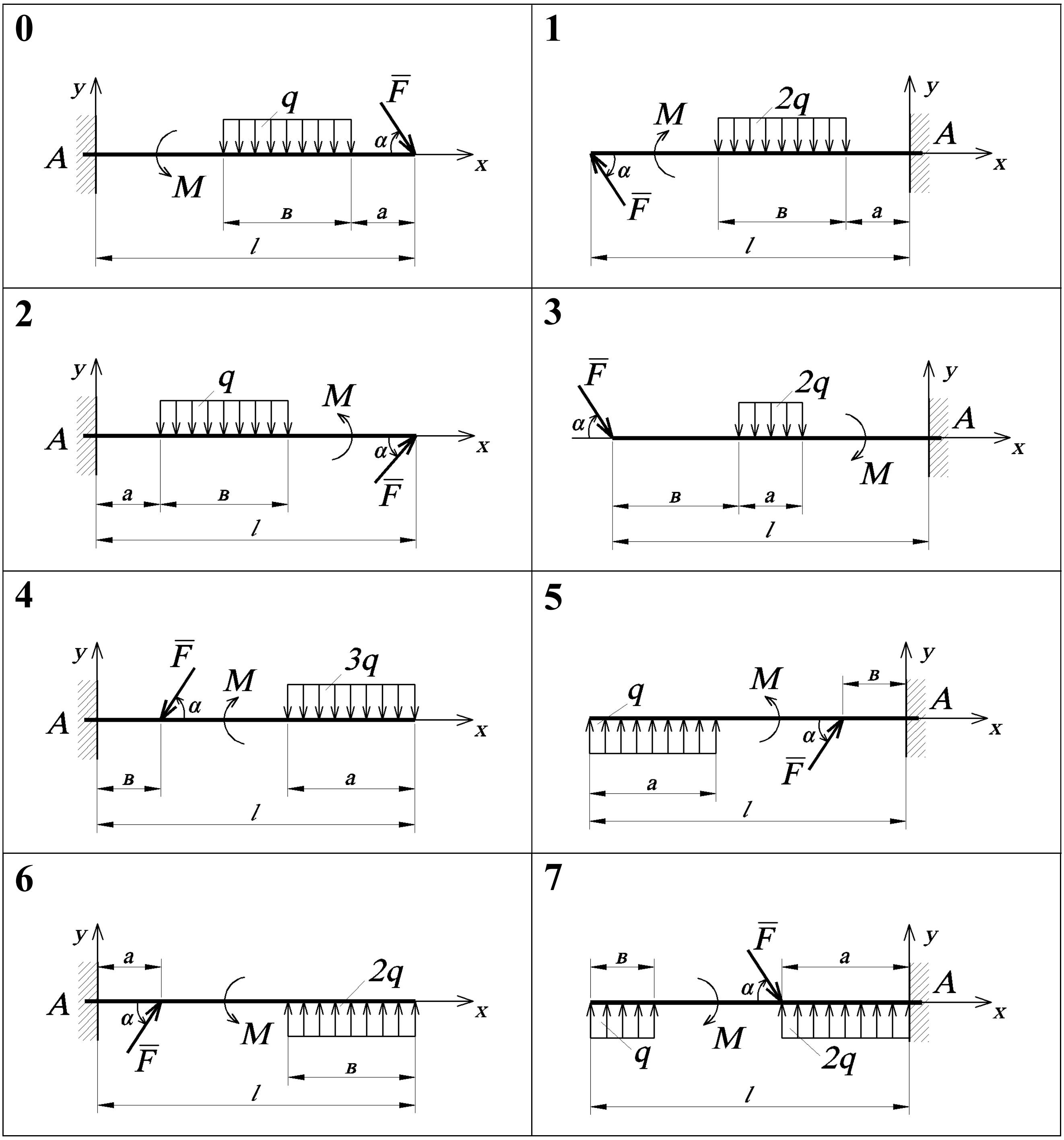
Ответ: $R = 25{,}3H$; $M = 168\, H \cdot м.$

6. ПЛОСКАЯ ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ

6.1. ЗАДАНИЕ С3. ОПРЕДЕЛНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ.

Условие задачи: Консольная балка весом $\vec{G}$ длиной l нагружена так, как показано на схемах 0-9 на рис. С3а. Определить реакции в опоре А. Данные для решения задачи приведены в табл. С3-1.

Указание: Номер схемы на рис. С3-1 соответствует последней цифре шифра “б”.



к оглавлению

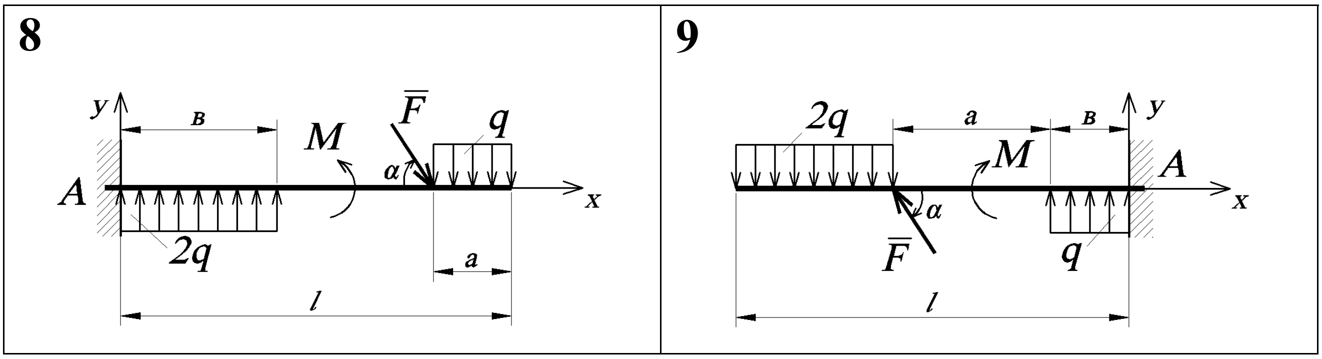


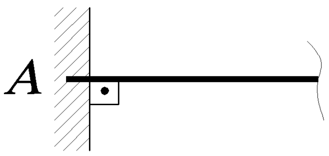
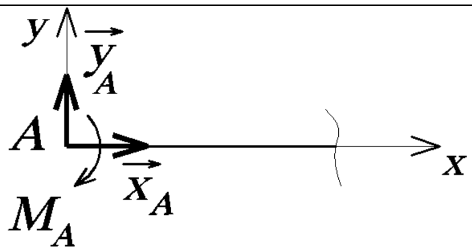
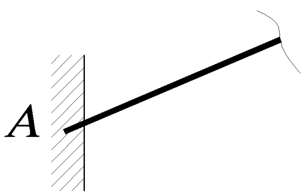
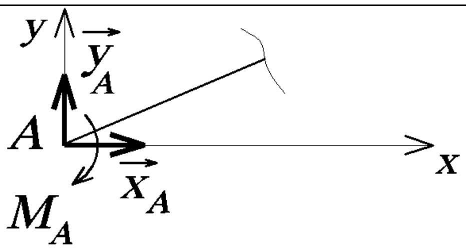
Рис. С3а

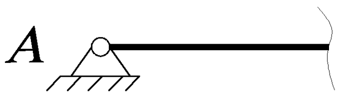
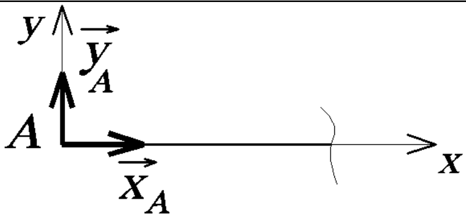
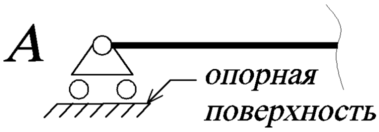
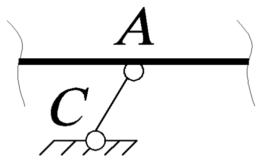
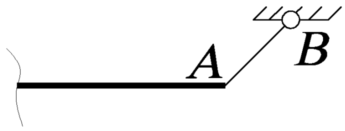
Таблица С3-1

Цифра шифра “а”	*l*	а	в	G	F	М, кН·м	q, Н/м	α, градус.
	м			Н				
0	3,0	0,8	1,6	180	800	1,5	450	30
1	3,5	1,5	1,2	220	750	2,0	500	45
2	4,0	2,0	1,5	260	700	2,5	550	60
3	4,5	1,5	2,2	300	650	3,0	600	120
4	1,5	0,4	0,5	340	600	3,5	650	145
5	2,0	0,6	0,9	380	550	1,5	700	150
6	3,5	0,9	2,1	420	500	2,0	750	210
7	4,0	1,2	2,3	440	450	2,5	800	225
8	4,5	2,5	1,8	480	400	3,0	850	240
9	2,5	1,3	0,7	520	350	3,5	900	300

Для выполнения задания С3 необходимо **знать**:

- типы опорных закреплений и их реакции:

Наименование опоры	Условное изображение	Реакции
Жесткая заделка (балка ⊥ опорной поверхности)		
Жесткая заделка (балка не перпендикулярна опорной поверхности)		

Неподвижный шарнир		
Подвижный шарнир		
Стержень АС		
Нить (гибкая связь) АВ		

- определение момента сил относительно точки: моментом силы относительно точки называется взятое с соответствующим знаком произведение силы на плечо. Плечо силы – это расстояние от данной точки до линии действия силы (или перпендикуляр, опущенный из данной точки на линию действия силы);

- теорему Вариньона о моменте равнодействующей;

- в положении равновесия главный вектор всех внешних сил и сил реакций равен нулю и главный момент всех внешних сил и сил реакций относительно любого центра также равен нулю;

- в положении равновесия проекции всех сил на оси плоской системы координат также должны равняться нулю, т.е.

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \text{и} \quad \sum F_{iy} = 0.$$

- в положении равновесия момент всех сил относительно произвольно выбранной точки О должен равняться нулю:

$$\sum M_O(\vec{F}_i) = 0.$$

к оглавлению

Пример выполнения задания С3.

Консольная балка весом $\vec{G}$ длиной l нагружена так, как показано на схеме (рис. С3б). Определить реакции в опоре А, если: l = 6,5 м; а = 2,5 м; в = 3,0 м; G = 920 Н; F = 1250 Н; М = 4,5 кН·м; q = 1100 Н/м; α = 300°.

Запишем условие задачи в кратком виде:

Дано: l = 6,5 м; а = 2,5 м; в = 3,0 м; G = 920 Н; F = 1250 Н; М = 4,5 кН·м;
q = 1100 Н/м; α = 300°.

Определить: реакции в опоре А.

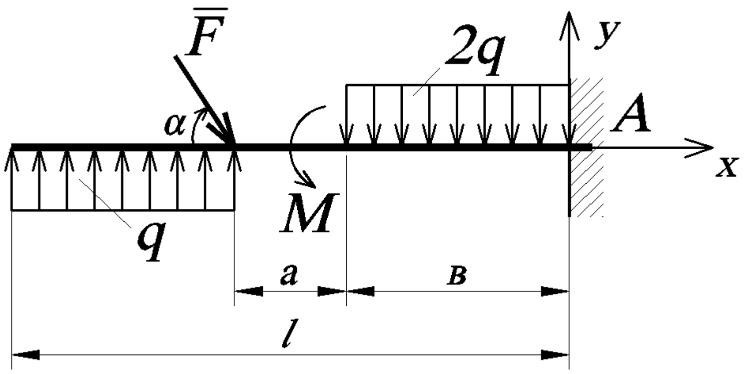


Рис. С3б

Решение.

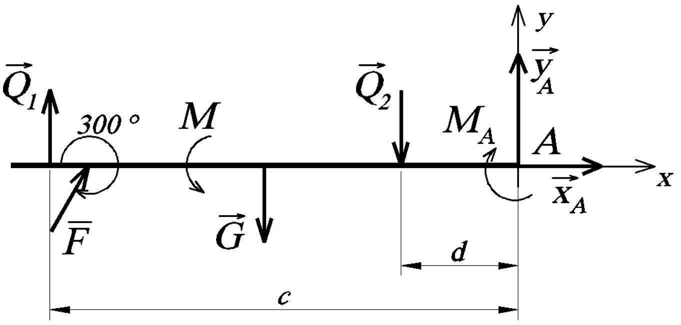
Для решения задачи составим расчетную схему в полном соответствии с условием задачи (рис. С3в). При этом:

1) четко показываем направление силы $\vec{F}$, которое определяется заданным углом α = 300°, отсчитываемым от горизонтали в сторону стрелки;

2) равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q заменяем сосредоточенной силой Q_1, которая равна

$$Q_1 = q(l - a - в) = 1100(6{,}5 - 2{,}5 - 3{,}0) = 1100\,H.$$

Направлена сила $\vec{Q}_1$ вертикально вверх (по направлению действия нагрузки q) и приложена в центре тяжести фигуры распределения (прямоугольника). Расстояние от линии действия силы $\vec{Q}_1$ до точки А равно:



$$c = a + в + \frac{l - a - в}{2} =$$

$$= 2{,}5 + 3{,}0 + \frac{6{,}5 - 2{,}5 - 3{,}0}{2} = 6{,}0\,м.$$

Рис. С3в

3) равномерно распределенную нагрузку интенсивностью $2q$ заменим сосредоточенной силой Q_2, равной:

$$Q_2 = 2 \cdot q \cdot в = 2 \cdot 1100 \cdot 3{,}0 = 6600\,H.$$

Направлена $\vec{Q}_2$ вертикально вниз. Линия действия силы $\vec{Q}_2$ отстоит от точки А на расстоянии

$$d = \frac{в}{2} = \frac{3{,}0}{2} = 1{,}5\,м.$$

4) силу тяжести показываем приложенной в геометрическом центре балки.

Рассматриваем равновесие консольной балки.

Связью для балки является опора А – жесткая заделка.

Условно отбрасываем связь и заменяем её действие на балку реакциями $\vec{X}_A$, $\vec{У}_A$ и реактивным моментом M_A (направления этих реакций и момента выбираем произвольно, соблюдая при этом $\vec{X}_A \perp \vec{У}_A$).

Таким образом, балка находится в равновесии под действием внешних сил $\vec{G}$, $\vec{F}$, $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ и момента M и сил реакций $\vec{X}_A$, $\vec{У}_A$ и M_A. Все эти силы расположены в одной плоскости. Направления их произвольны. Следовательно, имеет место равновесие твердого тела под действием плоской произвольной системы сил.

Составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \qquad X_A + F\cos(360^\circ - 300^\circ) = 0\,; \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \qquad У_A - Q_2 - G + F\sin(360^\circ - 300^\circ) + Q_1 = 0\,; \qquad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \qquad -Q_1 \cdot c - F \cdot \sin 60^\circ \cdot (a + в) + G \cdot \frac{l}{2} + M + Q_2 \cdot d - M_A = 0\,. \qquad (3)$$

Из (1) уравнения находим:

$$X_A = -F\cos 60^\circ = -1250 \cdot \frac{1}{2} = -625\,H.$$

Из (2) уравнения:

$$У_A = Q_2 + G - F\sin 60^\circ - Q_1 = 6600 + 920 - 1250 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1100 = 5340\,H.$$

Из (3) уравнения:

$$M_A = -Q_1 \cdot c - F \cdot \sin 60^\circ \cdot (a + в) + G \cdot \frac{l}{2} + M + Q_2 \cdot d = -1100 \cdot 6{,}0 - 1250 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (2{,}5 + 3{,}0) +$$

$$+ 920 \cdot \frac{6{,}5}{2} + 4500 + 6600 \cdot 1{,}5 = 4840\,H \cdot м.$$

Ответ: $X_A = -625\,H$; $У_A = 5340\,H$; $M_A = 4840\,H \cdot м.$

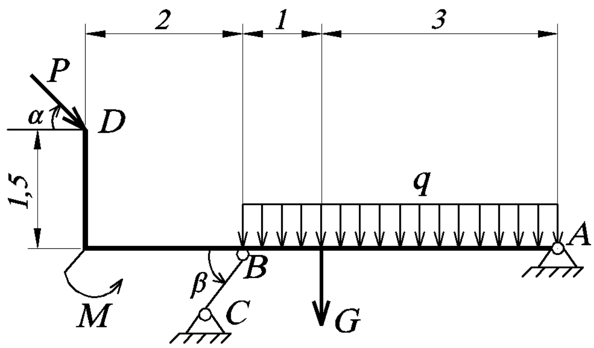
6.2. ЗАДАНИЕ С4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ДВУХОПОРНОЙ КОНСТРУКЦИИ.

Изображенные на рис. С4а балки АВ и сварные конструкции ABD находятся в равновесии под действием сосредоточенных сил, пары сил с моментом M и равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q. Указанные на схемах размеры заданы в метрах. Значения приложенных сил, момента, интенсивности, углов α и β, отсчитываемых от горизонтали или вертикали, что указано на рисунках, приведены в табл. С4-1.

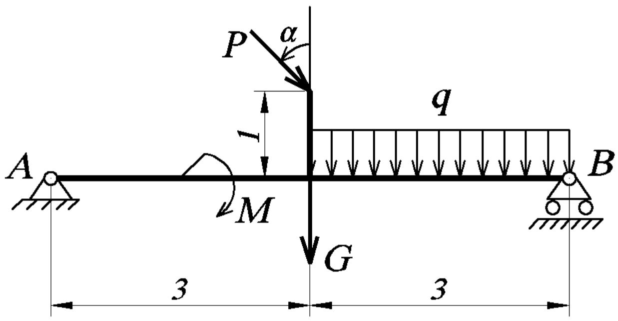
Определить реакции опор.

Указание: номер схемы, приведенной на рис. С4а, соответствует последней цифре шифра “б”.

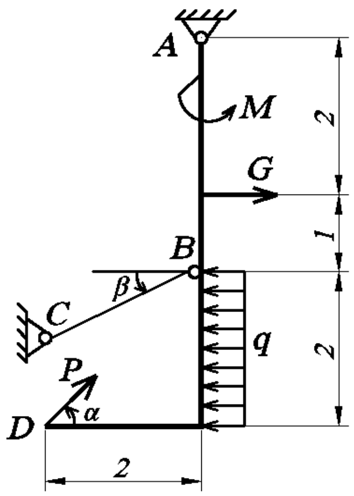
0



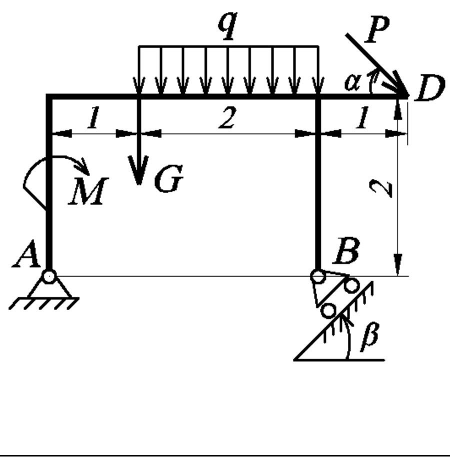
1



2



3



к оглавлению

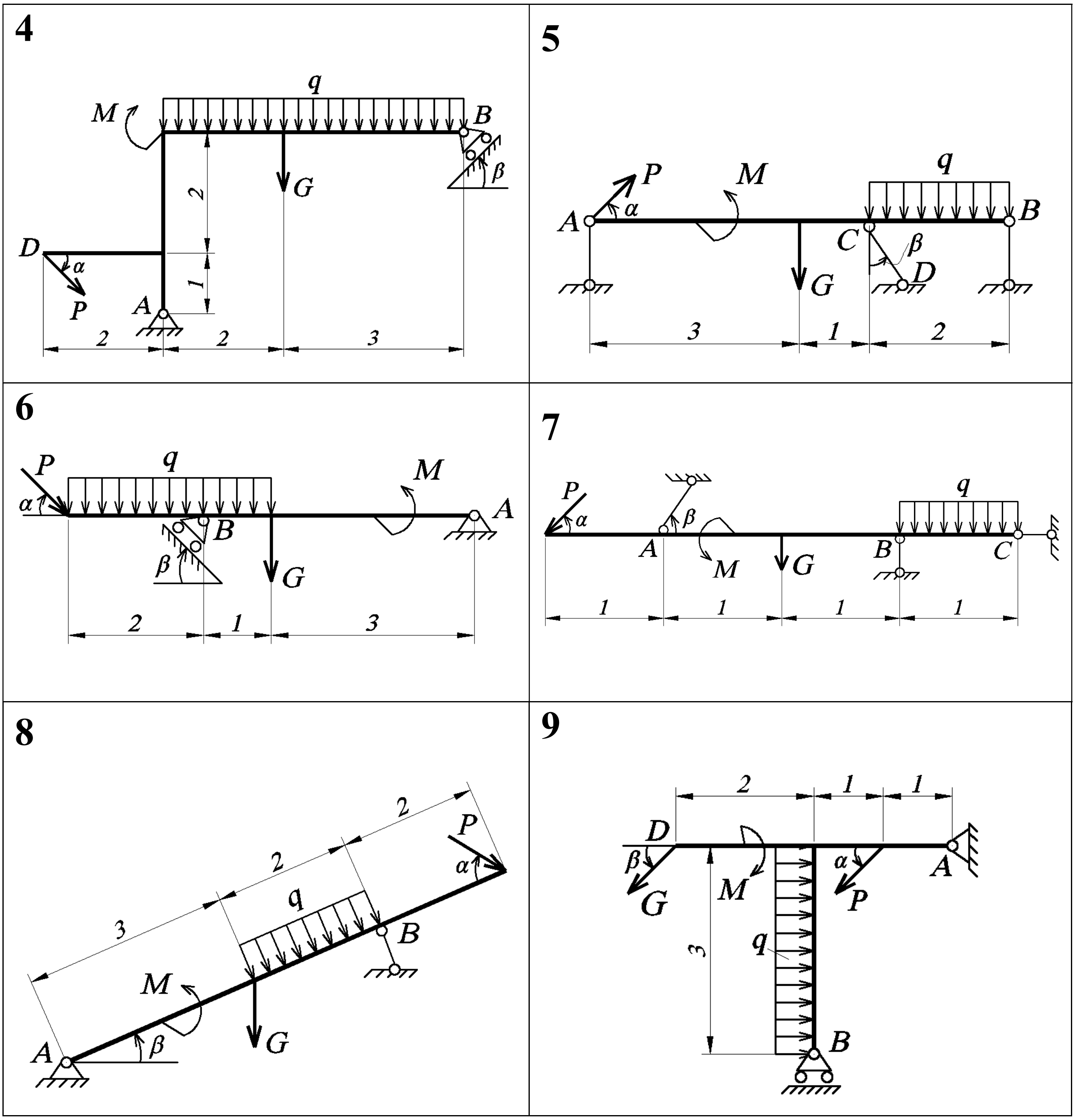


Рис. С4а

Таблица С4-1

Цифра шифра “а”	G	P	M	q	α	β
	Н	Н	Н·м	Н/м	град	град
0	10	10	8	2	240	45
1	4	5	6	1	30	60
2	16	8	5	0,5	45	30
3	20	4	10	2	60	-45
4	12	7	1	1	90	-60
5	14	6	2	4	120	-30

к оглавлению

6	5	14	4	2	135	45
7	16	4	14	1,5	150	30
8	15	6	6	3	210	-45
9	6	4	7	4	225	-60

Пример выполнения задания С4.

Определить реакции опор балки АВ, изображенной на рис. С4б.

Дано: G = 18 Н; P = 12 Н; M = 9 Н·м; q = 5 Н/м; α = 210°; β = -45°.

Найти: реакции связей.

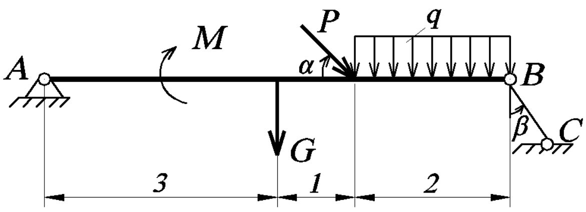


Рис. С4б

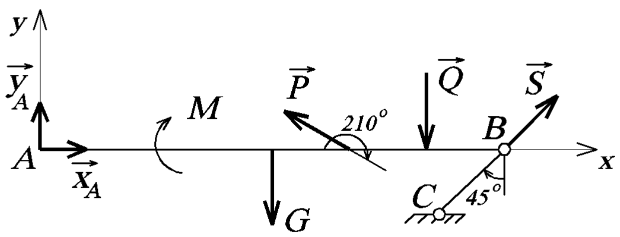


Рис. С4в

Решение.

1. На рис. С4в показываем направление силы $\vec{P}$ и положение стержня ВС в соответствии с условием настоящей задачи: сила $\vec{P}$ приложена к балке под углом α = 210° (показываем этот угол, который отсчитываем по стрелке, указанной на рис. С4б); т.к. β = -45°, то отсчитываем этот угол от вертикали в сторону, противоположную направлению угла β на рис. С4б.

   Рассматриваем равновесие балки АВ.

2. Связями для балки являются неподвижный шарнир А и стержень ВС.
3. Выбираем систему координат ХАУ.
4. Отбрасывая связи, заменяем их влияние реакциями. Показываем реакции неподвижного шарнира $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ и стержня $\vec{S}$ (см. рис. С4в).
5. Заменяем равномерно распределенную нагрузку интенсивности q одной сосредоточенной силой, равной

$$Q = 2 \cdot q = 2 \cdot 5 = 10\,H.$$

Таким образом, балка АВ находится в равновесии под действием внешних сил $\vec{G}$, $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, момента M и реакций $\vec{X}_A$, $\vec{У}_A$ и $\vec{S}$. Все силы и нагрузки действуют в одной плоскости – плоскости рисунка. Направления сил и нагрузок произвольны. Следовательно, балка АВ находится в равновесии под действием <u>плоской произвольной системы сил</u>.

6. Составляем три уравнения равновесия для плоской произвольной системы сил:

$$\sum F_{ix} = 0; \qquad X_A - P\cos 30^\circ + S\sin 45^\circ = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_{iy} = 0; \qquad У_A - G + P\sin 30^\circ - Q + S\cos 45^\circ = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \qquad -M - G\cdot 3 + P\cdot 4\sin 30^\circ - Q\cdot 5 - S\cdot 6\cos 45^\circ = 0. \tag{3}$$

Из уравнения (3) определяем значение реакции S:

$$S = \frac{M + G\cdot 3 - P\cdot 4\sin 30^\circ + Q\cdot 5}{6\cos 45^\circ} = \frac{9 + 18\cdot 3 - 12\cdot 4\cdot \frac{1}{2} + 10\cdot 5}{6\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 21{,}0\ H.$$

Из уравнения (1) определяем X_A:

$$X_A = P\cos 30^\circ - S\sin 45^\circ = 12\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 21{,}0\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5{,}82\ H.$$

И, реакцию $У_A$ находим из уравнения (2):

$$Y_A = G - P\sin 30^\circ + Q - S\cos 45^\circ = 18 - 12\cdot \frac{1}{2} + 10 - 21{,}0\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5{,}79\,H.$$

Ответ: $X_A = -5{,}82\ H$; $Y_A = 5{,}79\,H$; $S = 21{,}0\ H$.

Знак минус реакции X_A означает, что действительное направление этой реакции противоположно выбранному. Это не является ошибкой, т.к. не всегда можно угадать направления искомых реакций.

6.3. ЗАДАНИЕ С5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ (система двух тел).

Найти реакции опор и давление одного тела на другое. Схемы конструкций представлены на рис. С5а, на котором все размеры указаны в метрах. Необходимые для решения задач данные приведены в табл. С5-1.

Указание: номер схемы конструкции на рис. С5.1 соответствует последней цифре шифра “б”.

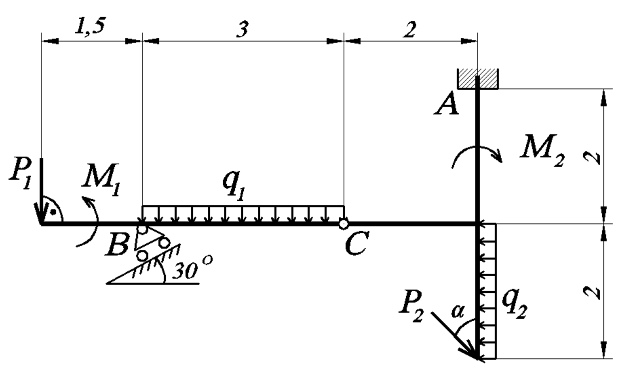
Примечание: 1. На всех схемах тела соединены промежуточным шарниром C (за исключением варианта 7, где тела AC и BD соединены в шарнирах C и D промежуточным стержнем CD).

2. Направление угла ***α*** *отсчитывается согласно показанным на схемах стрелкам.*

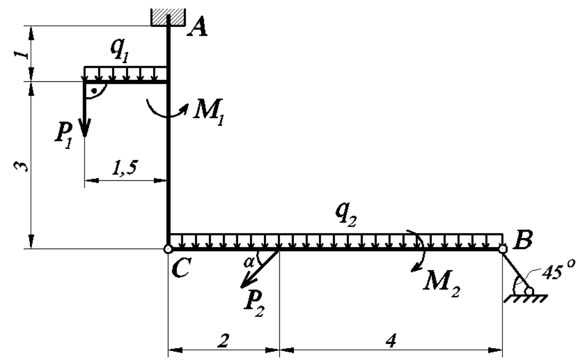
Таблица С5-1

Цифра шифра “а”	**P_1**	**P_2**	**q_1**	**q_2**	**M_1**	**M_2**	**α**
	кН		**кН/м**		**кН·м**		**радиан**
0	2	4	0	2	5	5	$\frac{2}{3}\pi$
1	3	4	3	0	4	8	$\frac{1}{6}\pi$
2	3	2	0	6	2	3	$\frac{1}{4}\pi$
3	6	3	4	0	6	1	$\frac{3}{4}\pi$
4	7	10	0	4	3	4	$\frac{5}{6}\pi$
5	4	7	2	0	7	2	$\frac{1}{3}\pi$
6	4	8	0	3	1	3	$\frac{5}{6}\pi$
7	5	6	6	0	6	2	$\frac{3}{4}\pi$
8	10	3	0	5	10	8	$\frac{2}{3}\pi$
9	1	2	1	0	4	1	$\frac{1}{4}\pi$

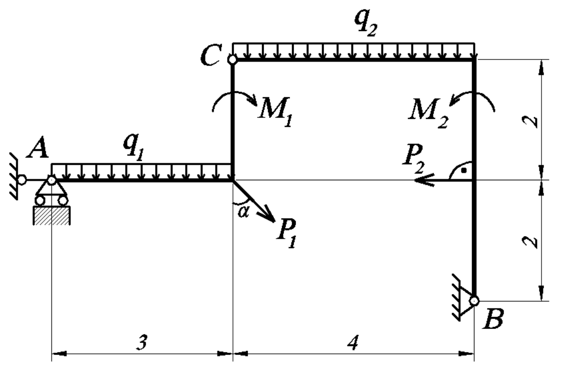
0


1,5
3
2
A
M_2
2
P_1
M_1
q_1
B
C
30°
2
P_2
α
q_2

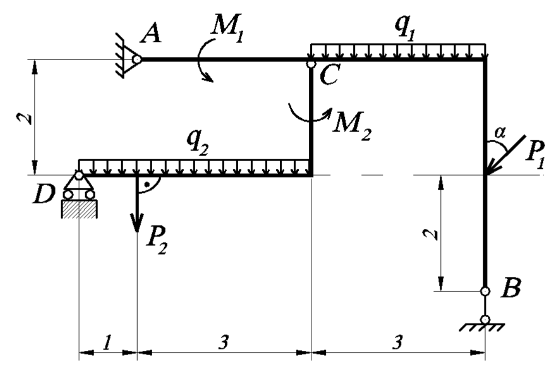
1


A
1
q_1
M_1
P_1
3
1,5
q_2
B
C
α
M_2
45°
P_2
2
4

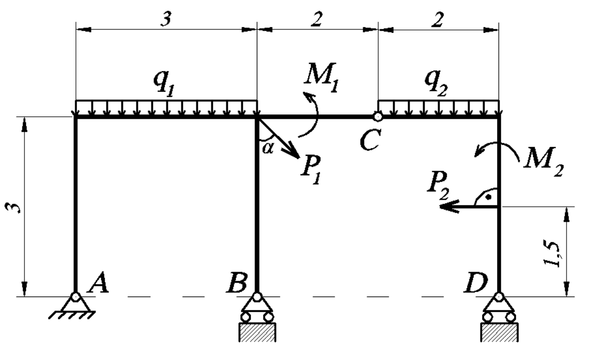
2


q_2
C
M_1
M_2
2
A
q_1
P_2
α
P_1
2
B
3
4

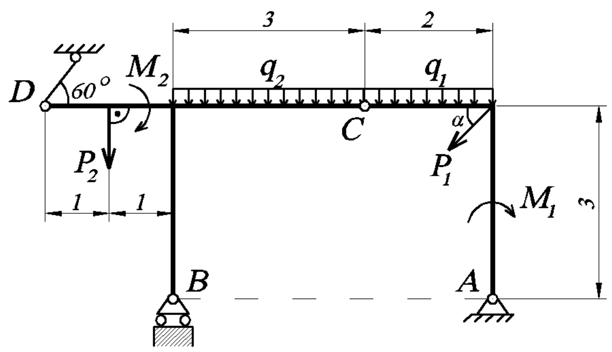
3


A
M_1
q_1
C
2
M_2
q_2
α
P_1
D
P_2
2
B
1
3
3

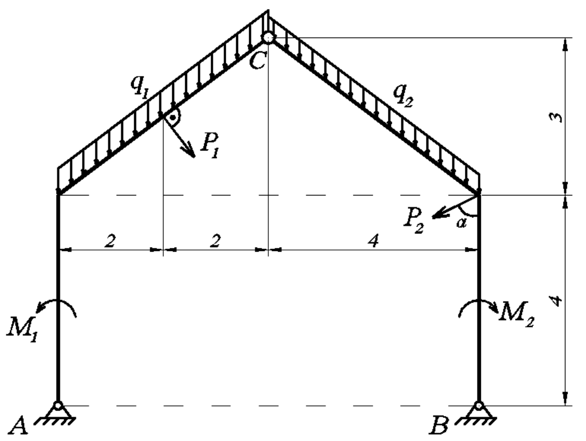
4


3
2
2
q_1
M_1
q_2
α
P_1
C
M_2
3
P_2
1,5
A
B
D

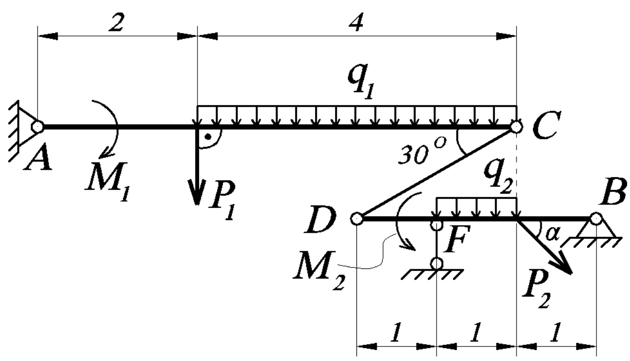
5


3
2
D
60°
M_2
q_2
q_1
C
α
P_2
P_1
1
1
M_1
3
B
A

6


q_1
C
q_2
3
P_1
P_2
α
2
2
4
4
M_1
M_2
A
B

7


2
4
q_1
C
A
M_1
P_1
30°
q_2
B
D
F
α
M_2
P_2
1
1
1

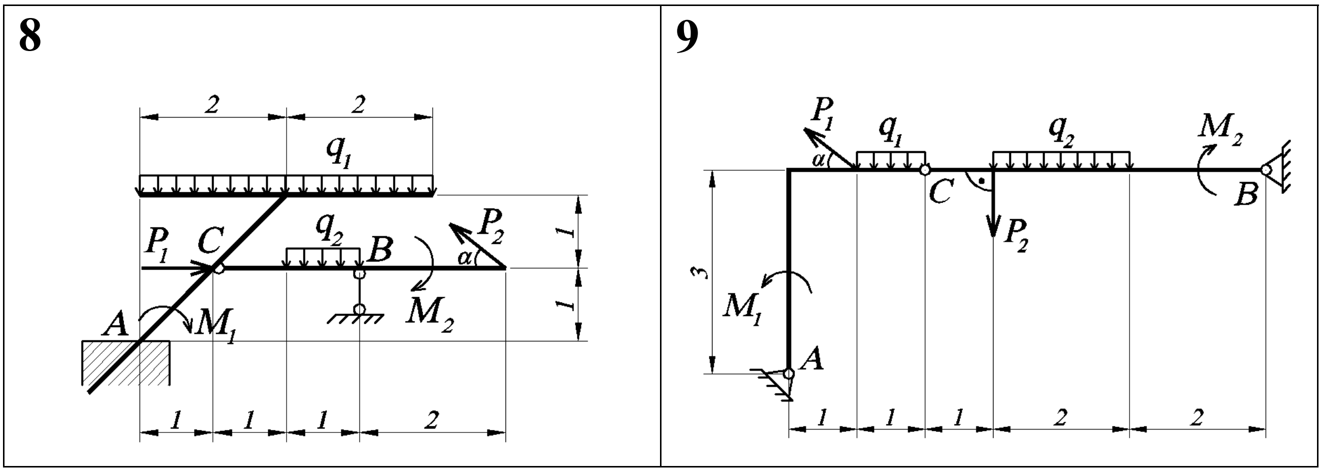


Рис. С5а

При решении задачи С5 рассматриваем равновесие двух твердых тел. В этом случае приходится рассматривать равновесие каждого тела в отдельности, учитывая при этом силы, с которыми действуют друг на друга тела, входящие в систему. Эти силы согласно аксиоме равенства действия и противодействия всегда равны между собой по модулю и противоположны по направлению. Если система находится в покое, то силы, приложенные к каждому из твердых тел, входящих в данную систему, уравновешиваются и, следовательно, для каждого из этих тел можно составить уравнения равновесия так же, как в предыдущих задачах статики.

Решение задач на равновесие системы двух тел возможны двумя способами.

Первый способ. Вначале рассматриваем равновесие всей системы в целом. Прикладываем к системе все внешние силы, распределенные нагрузки и моменты. При этом учитываем, что силы, с которыми тела, входящие в систему, действуют друг на друга, являются внутренними. Следовательно, при равновесии данной системы можно составлять для нее уравнения равновесия, так же как это делали для одного твердого тела, причем в эти уравнения равновесия войдут только внешние силы.

Затем рассматриваем равновесие какого-либо одного тела системы. При этом силы, с которыми на это тело действует другое тело, рассматриваются как силы внешние, которые, наряду с силами заданными, приложенными к точкам данного тела, будут входить в уравнения равновесия.

к оглавлению

Второй способ отличается от первого тем, что мы последовательно рассматриваем равновесие каждого тела, входящего в систему.

При решении задач и первым и вторым способами система координат выбирается один раз и в дальнейшем не меняется.

Пример выполнения задания С5.

Определить реакции опор и давление в промежуточном шарнире конструкции, изображенной на рис. С5б.

Дано: $P_1 = 20$ кН; $P_2 = 10$ кН; $q_{max} = 2$ кН/м; $M = 12$ кН·м; углы и размеры (в метрах) указаны на рис. С5б.

Определить реакции опор А и В и давление в шарнире С.

Решение.

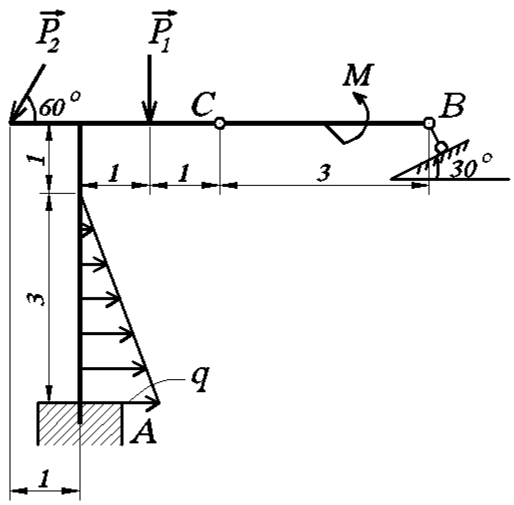


Рис. С5б

Решение задачи ведем в соответствии с краткой методикой решения задач статики (стр. 7…9).

1. Рассмотрим вначале равновесие звена ВС (это звено выбираем постольку, поскольку на это звено, как покажем ниже, действуют три неизвестные реакции и задача таким образом является статически определимой. Если сначала рассматривать левую часть конструкции – звено АС, то эта часть задачи окажется статически неопределимой, т.к. на АС действуют 5 неизвестных реакций). На отдельном рисунке (рис. С5в) изображаем расчетную схему. Выбираем систему координат ХУ.

2. Связями для звена ВС являются шарнир С и стержень, соединяющий точку В с наклонной поверхностью.

3. Отбрасываем связи, заменяя их действие реакциями: реакцию шарнира С представляем составляющими $\vec{X}_C$ и $\vec{Y}_C$, направление которых выбираем произвольно; реакцию стержня $\vec{R}_B$ направляем вдоль стержня так, как показано на рисунке.

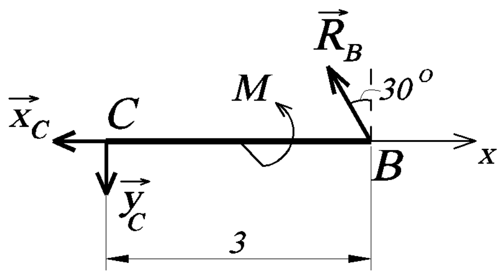


Рис. С5в

Таким образом, звено ВС находится в равновесии под действием сил $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ и $\vec{R}_B$ и момента М, расположенных в плоскости чертежа.

4. Составляем три уравнения равновесия для плоской произвольной системы сил:

$$\sum M_c(\vec{F}_i) = 0; \qquad M + R_B \cos 30^\circ \cdot 3 = 0, \tag{1}$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; \qquad Y_C \cdot 3 + M = 0, \tag{2}$$

$$\sum F_{ix} = 0; \qquad -X_C - R_B \sin 30^\circ = 0. \tag{3}$$

Учитывая условие задачи, из уравнения (1) находим

$$R_B = -\frac{M}{3\cos 30^\circ} = -\frac{12}{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -4{,}62\,кН.$$

Из уравнения (2) находим Y_C:

$$Y_C = -\frac{M}{3} = -\frac{12}{3} = -4\,кН.$$

Из уравнения (3) определяем X_C:

$$X_C = -R_B \sin 30^\circ = -(-4{,}62) \cdot 0{,}5 = 2{,}31\,кН.$$

Рассмотрим теперь равновесие звена АС (расчетная схема приведена на рис. С5г). Система координат остается прежней. Неравномерно распределенную нагрузку с максимальной интенсивностью q_{max} заменим сосредоточенной силой $\vec{Q}$, которая направлена в ту же сторону, что и нагрузка. Модуль этой силы равен:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3\,кН.$$

Линия действия этой силы, приложенной к звену АС, проходит через центр тяжести фигуры распределения (треугольника).

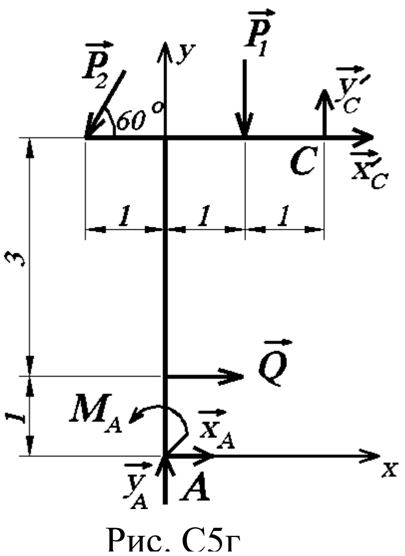


Рис. С5г

Связями для АС являются жесткая заделка (защемление) в опоре А и шарнир С.

Показываем составляющие реакции заделки $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$ и реактивный момент M_A. Учитываем, что силы действия равны силам противодействия и направлены в противоположные стороны, поэтому реакции $X_C^/$ и $Y_C^/$ соответственно равны:

$$\vec{X}_C^/ = -\vec{X}_C \quad и \quad \vec{Y}_C^/ = -\vec{Y}_C\,. \qquad (4)$$

Звено АС находится в равновесии под действием сил $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{Q}$, $\vec{X}_C^/$, $\vec{Y}_C^/$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и реактивного момента M_A. Все силы и момент находятся в одной плоскости.

Составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad X_A + X_C^/ + Q - P_2 \cos 60^\circ = 0\,, \qquad (5)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Y_A + Y_C^/ - P_1 - P_2 \sin 60^\circ = 0\,, \qquad (6)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad M_A + 2 \cdot Y_C^/ - 4 \cdot X_C^/ - 1 \cdot Q - 1 \cdot P_1 + 4 \cdot P_2 \cos 60^\circ + 1 \cdot P_2 \sin 60^\circ = 0\,. \qquad (7)$$

Из уравнения (5) с учетом (4) находим

$$X_A = -X_C^/ - Q + P_2 \cos 60^\circ = -2{,}31 - 3 + 10 \cdot 0{,}5 = -0{,}31\,кН\,.$$

Из уравнения (6) находим

$$У_A = P_1 + P_2 \sin 60^\circ - У_C^{/} = 20 + 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - (-4) = 32{,}7\,кН \ .$$

Из уравнения (7) определяем реактивный момент:

$$M_A = -2 \cdot У_C^{/} + 4 \cdot X_C^{/} + 1 \cdot Q + 1 \cdot P_1 - 4 \cdot P_2 \cos 60^\circ - 1 \cdot P_2 \sin 60^\circ = -2 \cdot (-4) + 4 \cdot 2{,}31 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 20 -$$

$$-4 \cdot 10 \cdot 0{,}5 - 1 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 11{,}6\,кН \cdot м .$$

Ответ: $X_A = -0{,}31\,кН$, $У_A = 32{,}7\,кН$, $M_A = 11{,}6\,кН \cdot м$, $X_C = 2{,}31\,кН$, $У_C = -4\,кН$,

$R_B = -4{,}62\,кН$.

Обращаем внимание на то, что при решении систем уравнений значение каждой из величин должно подставляться в последующее уравнение с тем знаком, с которым эта величина получилась при решении предыдущего уравнения. Так, при решении задачи С5, при нахождении реакции $У_A$ мы подставляем значение $У_C^{/}$ с тем же знаком, какой был получен из уравнения (2).

По этой причине не следует, как это иногда делают, найдя, что, например, $У_C = -4\,кН$, изменять направление этой силы на чертеже, т.к. это может привести к ошибкам при решении последующих уравнений равновесия.

Покажем теперь, как решить эту задачу другим способом.

На первом этапе решения задачи рассмотрим равновесие всей конструкции АСВ. На рис. С5д изобразим расчетную схему. Покажем конструкцию АСВ

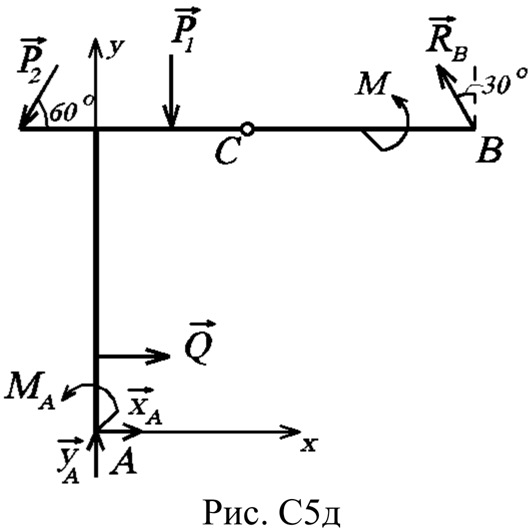


Рис. С5д

(без опор А и В), внешние силы $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{Q}$ и момент *M*. Связями для конструкции АСВ являются:

- опора А – жесткая заделка;
- опора В – стержень.

Отбрасывая связи, покажем на расчетной схеме реакции $\vec{X}_A$, $\vec{У}_A$, реактивный момент M_A и реакцию стержня $\vec{R}_B$ в выбранной системе координат ХАУ.

Таким образом, конструкция АСВ находится в равновесии под действием плоской произвольной системы сил. Составляем три уравнения равновесия:

$\sum F_{ix} = 0;\quad X_A + Q - P_2 \cos 60^\circ - R_B \sin 30^\circ = 0$;

$\sum F_{iy} = 0;\quad У_A - P_1 - P_2 \sin 60^\circ + R_B \cos 30^\circ = 0$;

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0;\quad R_B \cdot \cos 30^\circ \cdot 5 + R_B \cdot \sin 30^\circ \cdot 4 + M - P_1 \cdot 1 + P_2 \cos 60^\circ \cdot 4 +$$

$$+ P_2 \sin 60^\circ \cdot 1 - Q \cdot 1 + M_A = 0.$$

Полученная система уравнений не решается относительно неизвестных, т.к. их количество (четыре: X_A, $У_A$, M_A и R_B) превышает количество уравнений. Поэтому переходим к рассмотрению равновесия звена ВС. Повторять ход решения задачи на равновесие звена ВС нет необходимости: решение этой части задачи, приведенное выше, дало следующие результаты: $R_B = -4{,}62\ кН$; $X_C = 2{,}31\ кН$; $У_C = -4\ кН$. С учетом этих значений находим:

- из уравнения (1):

$$X_A = P_2 \cos 60^\circ + R_B \sin 30^\circ - Q = (-4{,}62) \cdot (\frac{1}{2}) + 10 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -0{,}31 кН;$$

- из уравнения (2):

$$У_A = P_1 + P_2 \sin 60^\circ - R_B \cos 30^\circ = 20 + 10\frac{\sqrt{3}}{2} - (-4{,}62) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 32{,}7 кН;$$

- из уравнения (3):

$$M_A = -R_B \cdot \cos 30^\circ \cdot 5 - R_B \cdot \sin 30^\circ \cdot 4 - M + P_1 \cdot 1 - P_2 \cos 60^\circ \cdot 4 - -P_2 \sin 60^\circ \cdot 1 + Q \cdot 1 =$$

$$= -(-4{,}62) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 - (-4{,}62) \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - 12 + 20 \cdot 1 - 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 11{,}6 кН \cdot м.$$

Ответ: $X_A = -0{,}31 кН$; $У_A = 32{,}7 кН$; $M_A = 11{,}6 кН \cdot м$; $R_B = -4{,}62 кН$;

$X_C = 2{,}31 кН$; $У_C = -4 кН$.

Краткий анализ приведенных выше двух способов решения задачи на равновесие системы двух тел показывает, что решать такие задачи целесообразнее, рассматривая последовательно равновесие каждого тела. При этом система из трех уравнений равновесия проще, потому, что содержит, как правило, не более трех неизвестных реакций.

6.4. ЗАДАНИЕ С6. РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ.

Решить задачу, указанную в табл. С6-1.

Таблица С6-1

Цифра шифра “б”	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Номер задачи	С6.1	С6.2	С6.3	С6.4	С6.5	С6.6				

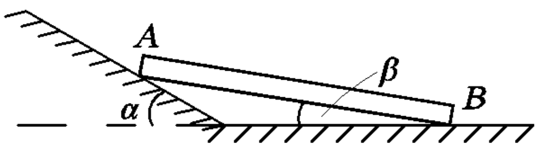


Рис. С6а

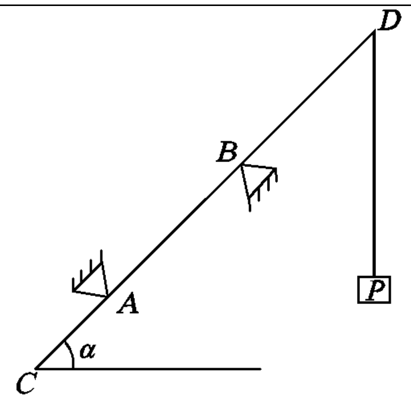


Рис. С6б

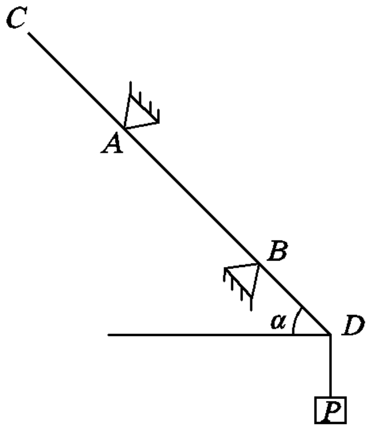


Рис. С6в

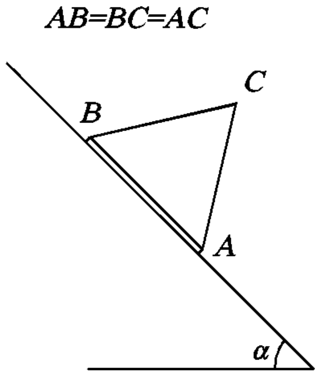


Рис. С6г

Задача С6.1. Однородная балка АВ весом Q, опирающаяся концом В на горизонтальную плоскость и концом А на плоскость, образующую с горизонтальной поверхностью угол α (рис. С6а), находится в равновесии. Коэффициенты трения скольжения в точках А и В соответственно равны f_A и f_B. Данные для решения и параметры, подлежащие определению, даны в табл. С6-2.

Таблица С6-2

Цифра шифра “а”	f_A	f_B	**α**	**β**	**Величина, подлежащая определению**
0	0	f	α	β	Q
1	f	0	-	-	α
2	f	f	α	-	β
3	0	-	α	β	f_B
4	f	0	α	β	Q
5	-	-	α	β	$f_A = f_B = f$
6	0	f	-	β	α
7	-	0	α	-	f_A
8	0	f	α	-	β
9	f	f	-	β	α

Задача С6.2. Пренебрегая весом балки CD, определить, при каком значении искомой величины (табл. С6-3) балка CD будет сохранять состояние предельного равновесия (рис. С6б). AB = 0,8 м, CD = 1,2 м, AC = BD, f_A и f_B — коэффициенты трения скольжения в опорах A и B.

Задача С6.3. Решить задачу С6-2, используя рис. С6в.

Задача С6.4. На плоскости, отклоненной от горизонтальной на угол α, находится равносторонняя призма ABC с точечными выступами A и B (рис. С6г). При каком значении искомой величины (табл. С6-3) призма весом P будет находиться в состоянии предельного равновесия, если коэффициенты трения скольжения в выступах A и B равны f_A и f_B.

Задача С6.5. Решить задачу С6-4. Расчетная схема изображена на рис. С6д.

Условие задачи: на шероховатой плоскости, отклоненной от горизонтальной на угол α, находится параллелепипед ABCD (AB=2AD=4м) с выступами в точках A и B. При каком значении искомой величины (табл. С6-3)

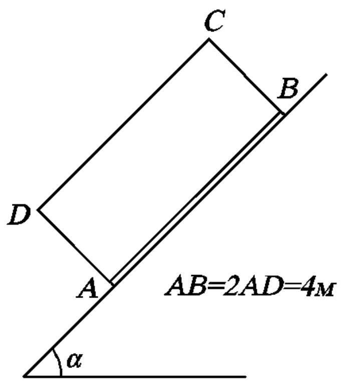


Рис. С6д

параллелепипед весом P будет находиться в состоянии предельного равновесия, если коэффициенты трения скольжения в выступах A и B соответственно равны f_A и f_B.

Таблица С6-3

Цифра шифра “а”	f_A	f_B	P	α	Задача	Величина, подлежащая определению
0	f	0	-	α	-	P
1	-	f	P	α	С6.2	f_A
2	0	f	P	-	С6.3	α
3	f	-	P	α	С6.4	f_B
4	0	f	-	α	С6.5	P
5	f	0	P	-	-	α
6	0	-	P	α	-	f_B
7	f	f	P	-	-	α
8	f	f	-	α	-	P
9	-	0	P	α	-	f_A

ЗАДАЧА С6.6. На наклонной под углом α плоскости лежит тело A весом P, соединенное с телом B весом Q нерастяжимой невесомой нитью, переброшенной через блок C (рис. С6е). Тело B находится на плоскости, образующей с горизонтальной поверхностью угол β. Пренебрегая трением

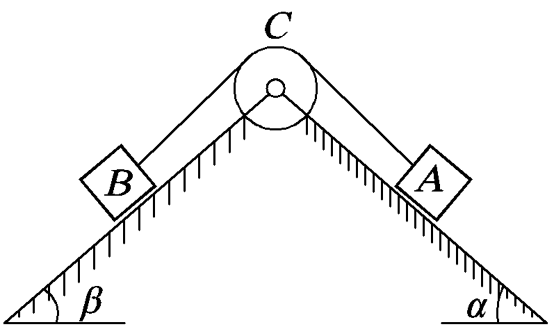


Рис. С6е

на блоке, определить, при каком значении искомой величины, указанной в табл.

С6-4, возможно предельное равновесие всей системы, если f_A – коэффициент трения скольжения тела А, f_B – коэффициент трения скольжения тела В.

Таблица С6-4

Цифра шифра "а"	**f_A**	**f_B**	**P**	**Q**	**α**	**β, град**	**Найти**
0	0	f	P	Q	-	-	α
1	-	0	P	Q	α	-	f_A
2	f	f	P	Q	-	-	α
3	0	f	P	-	α	-	Q
4	f	0	P	Q	-	-	α
5	-	-	P	Q	α	0	$f_A = f_B = f$
6	0	f	-	Q	α	30	P
7	f	0	-	Q	α	45	P
8	f	0	P	-	α	60	Q
9	0	-	P	Q	α	75	f_B

Методические указания к решению задач на равновесие при наличии трения

Наибольшие затруднения обычно вызывают задачи на равновесие тел при наличии сил трения скольжения. Это объясняется тем, что сила трения вообще является величиной неопределенной, для которой мы знаем только её предельное максимальное значение, равное произведению коэффициента трения скольжения f на нормальную (т.е. перпендикулярную к опорной поверхности) реакцию N. Поэтому в процессе решения приходится оперировать с неравенствами, и навыков у студентов, как правило, бывает недостаточно. Только в тех случаях, когда отыскивается предельное значение неизвестной величины, задача сводится к решению обычной системы уравнений статики.

Прежде чем привести пример решения задачи на равновесие тел при наличии трения, сделаем некоторые замечания самого общего порядка. Допустим, что в задаче требуется определить угол α, который образует лестница, приставленная к стене, с плоскостью пола при равновесии. Надо составить уравнения равновесия и исключить из них силы трения с помощью неравенств $F_1 \le f_1 N_1$, $F_2 \le f_2 N_2$

или с помощью равенств: $F_1 = k_1 N_1$ и $F_2 = k_2 N_2$,

где $k_1 \le f_1$ и $k_2 \le f_2$.

При решении задач на равновесие при наличии сил трения необходимо следить, чтобы все промежуточные результаты, получаемые при математических выкладках, не противоречили физическому смыслу задачи. Иначе использовать их в дальнейшем нельзя.

При решении неравенств в буквенном выражении, одно из часто встречающихся затруднений состоит в том, что требуется определить величину Х из условия $(a-b)x \le c-d$ (где a, b, c и d даны по условию задачи). В этом случае не следует стремиться обойти эту неопределенность, а необходимо наложить ограничения на данные величины и решить неравенство при тех или иных предположениях. Вообще во всех тех случаях, когда в формулах содержатся разности, можно обращать найденную величину или в ноль, или в бесконечность, или сделать ее неопределенной, или, наконец, отрицательной, - необходимо провести исследование и все согласовать с практической стороной задачи.

При составлении уравнений равновесия следует выбирать системы координат и точки для уравнений моментов таким образом, чтобы уравнения получались простейшими, содержащими по возможности меньшее число неизвестных величин.

Прежде чем к телу, условия равновесия которого определяются, приложить действующие на него силы, надо постараться представить себе, как это тело начнет перемещаться, если равновесие будет нарушено. Силы трения надо направить так, чтобы они препятствовали скольжению. Если скольжение возможно в двух взаимно противоположных направлениях, то надо сделать то и другое предположение и определить верхнюю и нижнюю границы изменения искомой величины.

Пример решения задачи на равновесие при наличии трения.

Однородная горизонтальная балка длиной $2l$ опирается одним концом А на наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол α. Определить, на каком расстоянии Х от середины балки надо поставить опору В, чтобы балка находилась в равновесии. Коэффициенты трения в точках А и В одинаковы и равны f (рис. С6ж).

Решение.

На балку действуют три силы: сила тяжести балки P, приложенная в ее центре тяжести, и реакции опор N_A и N_B , приложенные в точках А и В соответственно. Так как при нарушении равновесия конец балки А начнет скользить вниз, то сила трения в точке А будет направлена вверх по наклонной плоскости и, следовательно, сила трения в точке В будет направлена вдоль балки вправо.

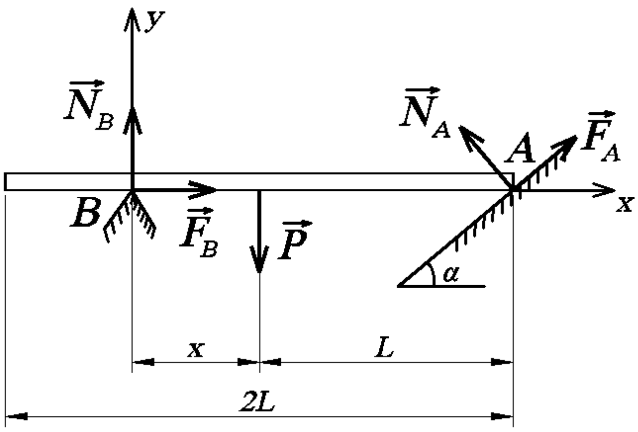


Рис. С6ж

Рассматривая предельное состояние равновесия балки составляем в выбранной системе координат три уравнения равновесия:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \qquad Pl - N_B(x+l) = 0\,; \tag{1}$$

$$\sum F_{ix} = 0; \qquad F_B - N_A \sin\alpha + F_A \cos\alpha = 0\,; \tag{2}$$

$$\sum F_{iy} = 0; \qquad N_B - P + N_A \cos\alpha + F_A \sin\alpha = 0\,. \tag{3}$$

К полученным уравнениям присоединим неравенства:

$$F_A \le fN_A; \tag{4}$$

$$F_B \le fN_B. \tag{5}$$

Преобразуем уравнение (3), используя неравенства (4):

$$N_B - P + N_A\cos\alpha + fN_A\sin\alpha \ge 0;$$

$$N_B - P + N_A(\cos\alpha + f\sin\alpha) \ge 0;$$

$$N_A(\cos\alpha + f\sin\alpha) \ge P - N_B,$$

откуда

$$N_A \ge \frac{P - N_B}{\cos\alpha + f\sin\alpha}.$$

Преобразуем уравнение (2), используя неравенства (4) и (5):

$$fN_B - N_A\sin\alpha + fN_A\cos\alpha \ge 0.$$

Подставив N_A , получим:

$$fN_B - \frac{(P - N_B)\sin\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} + \frac{f(P - N_B)\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} \ge 0;$$

$$\frac{fN_B\cos\alpha + f^2 N_B\sin\alpha - P\sin\alpha + N_B\sin\alpha + fP\cos\alpha - fN_B\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} \ge 0;$$

$$\frac{N_B(f^2+1)\sin\alpha - P(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{\cos\alpha + f\sin\alpha} \ge 0.$$

Так как знаменатель всегда больше нуля, то числитель

$$N_B(f^2+1)\sin\alpha - P(\sin\alpha - f\cos\alpha) \ge 0;$$

$$N_B(f^2+1)\sin\alpha \ge P(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

откуда

$$N_B \ge \frac{P(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{(f^2+1)\sin\alpha}.$$

Подставив N_B в уравнение (1), получим:

$$Pl - \frac{P(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{(f^2+1)\sin\alpha}(x + l) \ge 0;$$

$$\frac{Pl(f^2+1)\sin\alpha - Px(\sin\alpha - f\cos\alpha) - Pl(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{(f^2+1)\sin\alpha} \ge 0.$$

Так как знаменатель всегда больше нуля, то числитель

$$lf^2 \sin\alpha + l\sin\alpha - x(\sin\alpha - f\cos\alpha) - l\sin\alpha + fl\cos\alpha \geq 0;$$

$$lf(f\sin\alpha + \cos\alpha) - x(\sin\alpha - f\cos\alpha) \geq 0;$$

$$lf(f\sin\alpha + \cos\alpha) \geq x(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

откуда

$$x \leq \frac{lf(f\sin\alpha + \cos\alpha)}{\sin\alpha - f\cos\alpha}.$$

Разделив числитель и знаменатель на *cosα*, получим

$$x \leq \frac{f(ftg\alpha + 1)}{tg\alpha - f} l.$$

Это решение будет иметь место при $f \leq tg\alpha$, так как при $f = tg\alpha$ дробь обращается в бесконечность, а при $f > tg\alpha$ получается отрицательный результат, а расстояние не может быть отрицательным.

7. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ.

ЗАДАНИЕ С7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТЕЛА.

К однородной прямоугольной плите ABCD (рис. С7а, схемы 3, 4, 5, 6, 7 и 0) или OABC (рис. С7а, схемы 1, 2, 8) или горизонтальной, жестко закрепленной плите ACBK (рис. С7а, схема 9) весом $\vec{G}$ приложены:

- линейная равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q (схемы 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 и 0) или линейная неравномерно распределенная нагрузка максимальной интенсивности q (схема 8);

- сосредоточенная сила $\vec{F}$, приложенная к точке K плиты, проекции которой F_x, F_y и F_z представлены в табл. С7-1;

- пара сил, векторный момент которой $\vec{M}$ задан через его проекции M_x, M_y, M_z.

Найти реакции опор плиты.

Необходимые данные указаны в табл. С7-1.

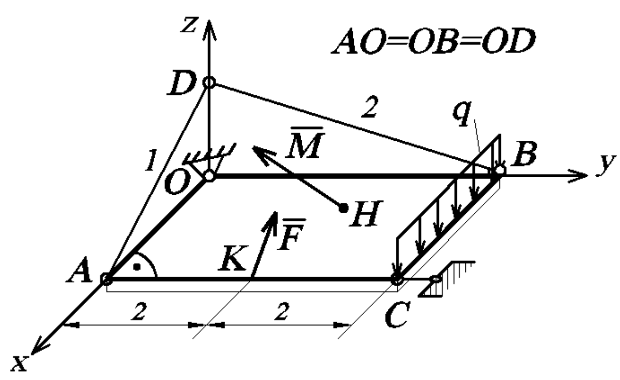
Указание: Схема конструкции на рис. С7.1 выбирается в соответствии с последней цифрой шифра “б”.

Таблица С7-1

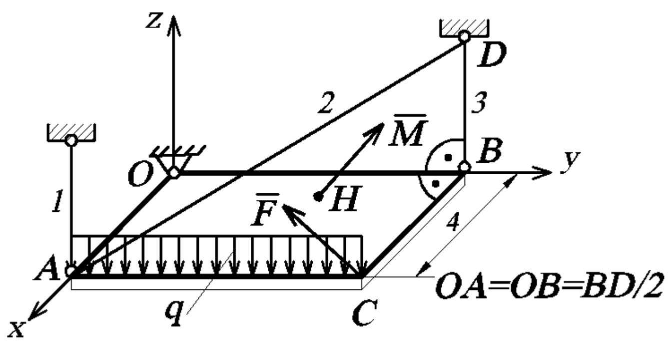
Цифра шифра “а”	G, кН	M_x	M_y	M_z	F_x	F_y	F_z	q, кН/м
		кН·м			кН			
1	12	2	0	0	5	0	7	1,5
2	10	0	4	3	-2	0	0	1
3	8	0	10	0	0	6	8	0
4	14	9	-3	0	0	10	0	2
5	4	0	0	-6	10	-5	0	0
6	7	6	0	4	0	0	-4	1,5
7	11	-3	1	4	7	0	0	0

8	16	0	-3	6	0	0	6	1
9	5	2	2	2	-3	8	0	0
0	6	5	0	-1	2	-3	4	2

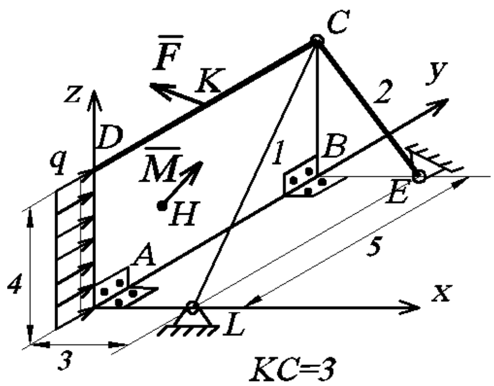
1



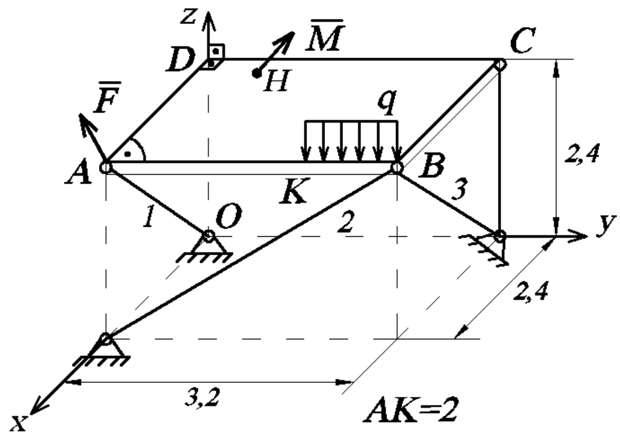
2



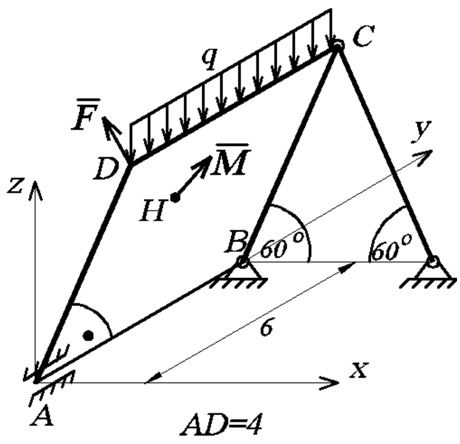
3



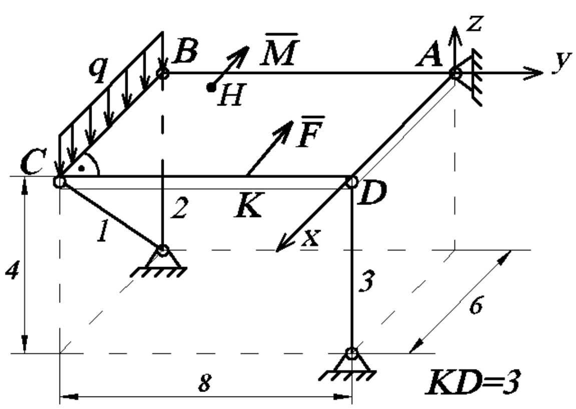
4



5



6



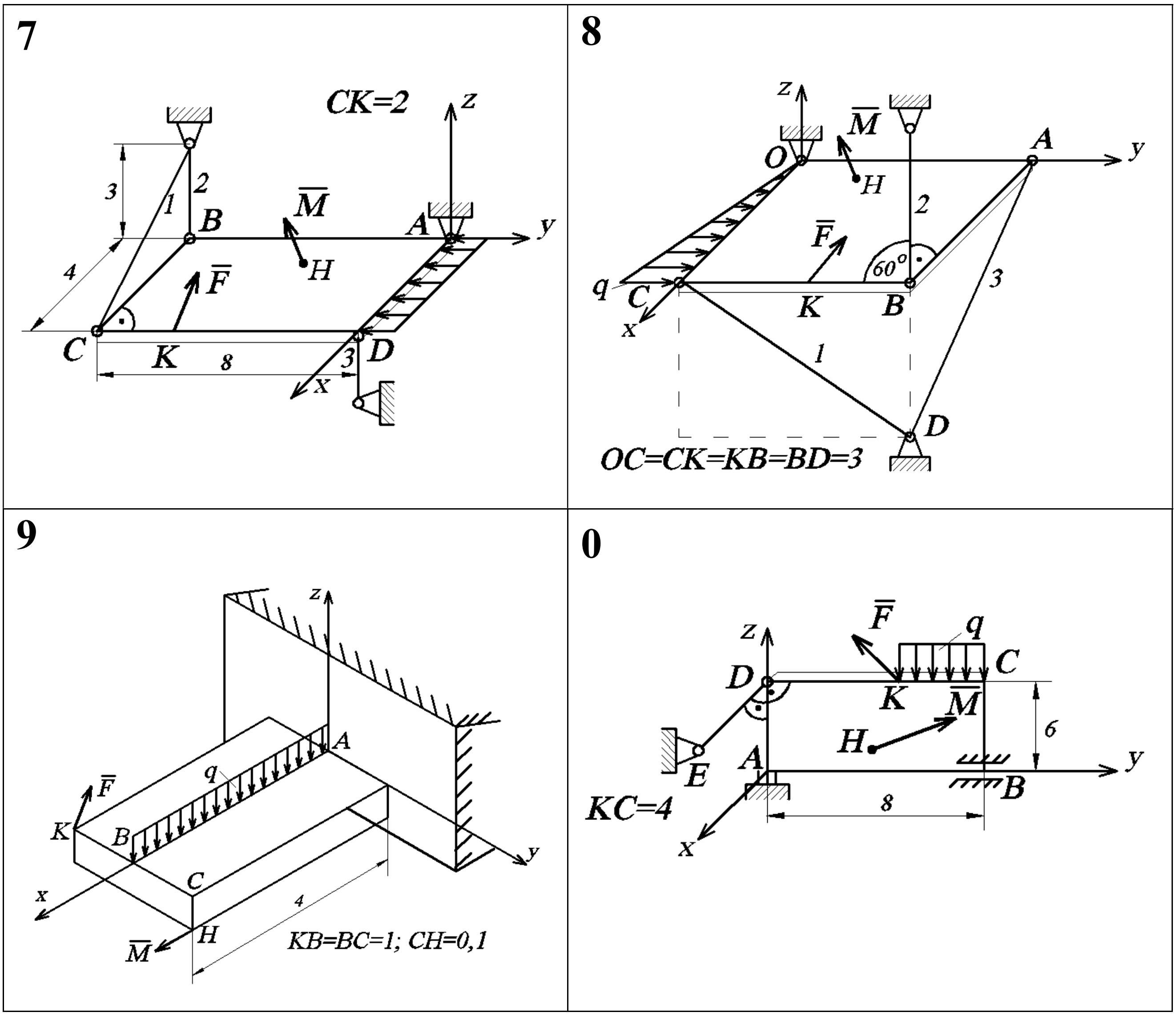
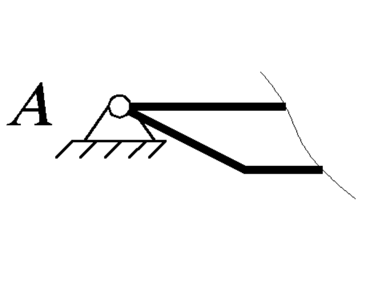
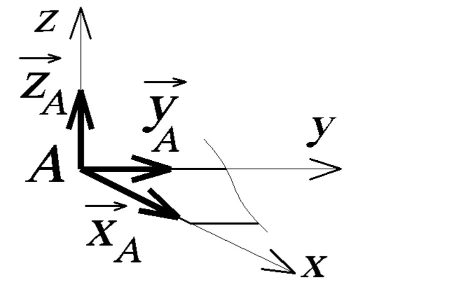
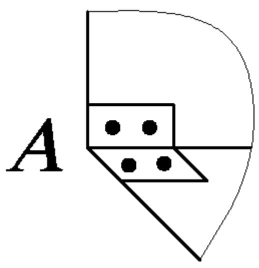
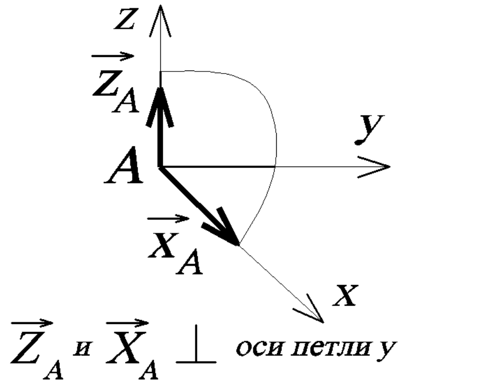
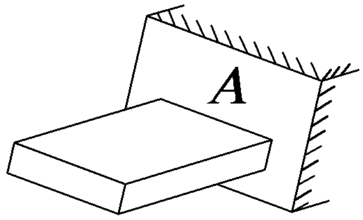
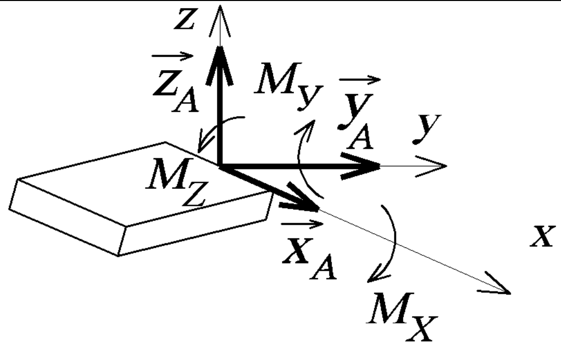


Рис. С7а

При решении задачи С7 необходимо знать реакции пространственных опор:

Тип опоры	Условное изображение	Реакции
Неподвижный шарнир (шаровой шарнир)		

к оглавлению

Петля		
Жесткая заделка		

Примечание: Возможны направления реакций и моментов в противоположные стороны.

Пример выполнения задания С7.

Условие задачи: Однородная прямоугольная рама ABCD (рис. С7б) весом G находится в равновесии под действием силы $\vec{F}\ (2,-3,1)$, приложенной к точке К, пары сил с моментом $\vec{M}\ (-3,1,4)$ и линейной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q = 1 кН/м. Угол α = 30°, а угол β = 45°. Размеры (в метрах) указаны на рис. С7б. Найти реакции опор.

Запишем условия задачи в кратком виде:

Дано: G = 1кН; F_x = 2 кН; F_y = -3 кН; F_z = 1 кН; M_x = -3 кН·м; M_y = 1 кН·м;

M_z = 4 кН·м; q = 1 кН/м; α = 30°; β = 45°.

Найти: реакции опор.

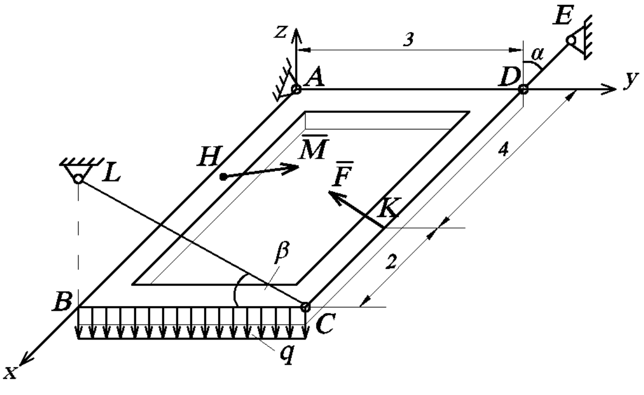


Рис. С7б

к оглавлению

Решение.

Решение задачи будем вести в соответствии с краткой методикой решения задач статики.

1. Рассматриваем в равновесии раму ABCD.

2. Выявляем связи. Связями для рамы ABCD являются шаровой шарнир A, стержень DE и стержень CL.

3. Изображаем расчетную схему (рис. С7в) в выбранной системе отсчета XYZ, на которой показываем силу тяжести рамы $\vec{G}$, внешнюю силу $\vec{F}$, результирующую распределенной нагрузки $\vec{Q}$, момент пары сил $\vec{M}$, и реакции связей: а) шарового шарнира $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и $\vec{Z}_A$; б) стержня DE - $\vec{S}_D$; в) стержня CL - $\vec{S}_C$.

4. Анализ сил, представленных на расчетной схеме, показывает, что рама ABCD находится в равновесии под действием произвольной пространственной системы сил.

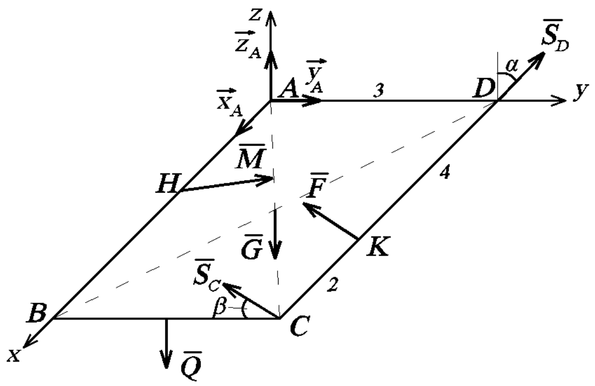


Рис. С7в

5. Составляем три уравнения равновесия в проекциях на оси координат:

$$\sum F_{ix} = 0; \qquad X_A + F_X = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \qquad Y_A - F_y - S_C \cos\beta + S_D \sin\alpha = 0; \qquad (2)$$

$$\sum F_{iz} = 0; \qquad Z_A - Q - G + F_Z + S_C \sin\beta + S_D \cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

Из этих уравнений можем определить только реакцию X_A:

$$X_A = -F_X = -2\,кН.$$

В уравнении (3) сила $Q = q \cdot BC = 1 \cdot 3 = 3\,кН$.

Составим теперь три уравнения моментов относительно выбранных осей координат. Для этого выполним дополнительные рисунки:

6. Составляя уравнение моментов всех сил относительно оси Х изобразим раму и действующие на нее нагрузки со стороны положительного направления оси Х. Таким образом мы значительно упрощаем вычисления, т.к. переходим от “пространственной” статики к статике “плоской”: определяем моменты всех сил (точнее – проекций всех сил на плоскость УAZ) и момента М относительно точки А (точки пересечения оси Х с перпендикулярной ей плоскостью УAZ). Эта расчетная схема изображена на рис. С7г. Здесь силы $\vec{G}$, $\vec{Q}$, $\vec{F}_y$, $\vec{F}_z$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{S}_C$ и $\vec{S}_D$ проектируются в натуральную величину. Сила $\vec{X}_A$, также как и ось Х, на эту плоскость проектируется в точку.

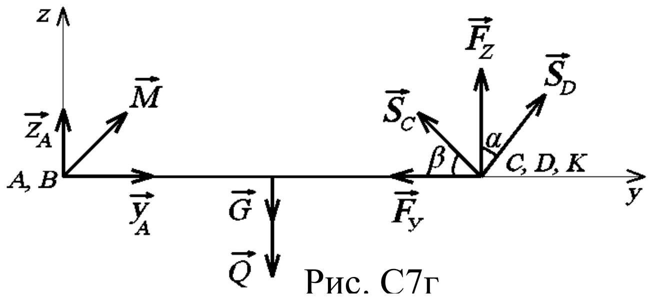


Рис. С7г

Составляем уравнение моментов:

$$\sum M_x(\vec{F}_i) = \sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \qquad S_D \cos\alpha \cdot 3 + F_Z \cdot 3 + S_C \sin\beta \cdot 3 - (G+Q) \cdot 1{,}5 + M_X = 0; \qquad (4)$$

Важно: уравнение $\sum M_x(\vec{F}_i) = \sum M_A(\vec{F}_i) = 0$ справедливо только для этой задачи.

7. Составляя уравнение моментов всех сил относительно оси У, изобразим раму и действующие на нее силы со стороны положительного направления оси У (рис. С7д). На этой расчетной схеме показаны силы $\vec{G}$, $\vec{Q}$, $\vec{F}_x$, $\vec{F}_z$, $\vec{X}_A$ и $\vec{Z}_A$, которые проектируются в натуральную величину и силы $\vec{S}'_C$ и $\vec{S}'_D$, которые, будучи проекциями, меньше сил $\vec{S}_C$ и $\vec{S}_D$ соответственно. Поэтому, на схеме эти проекции обозначены со штрихом. Модули этих проекций равны:

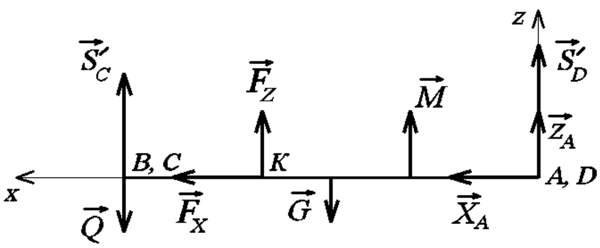


Рис. С7д

$$S'_C = S_C \sin\beta; \qquad S'_D = S_D \cos\alpha .$$

Составляем уравнение моментов всех сил относительно точки пересечения оси У с плоскостью XAZ, т.е. относительно точки А:

$$\sum M_y(\vec{F}_i) = \sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \qquad Q\cdot 6 - S_C \sin\beta \cdot 6 - F_Z \cdot 4 + G\cdot 3 + M_y = 0; \qquad (5)$$

Отметим, что равенство $\sum M_y(\vec{F}_i) = \sum M_A(\vec{F}_i) = 0$ справедливо только для данной конкретной задачи.

8. Для лучшего понимания, составляя уравнение моментов относительно оси Z, покажем раму и действующие на нее нагрузки со стороны положительного направления оси Z (рис. С7е). На этой схеме в натуральную величину показаны силы $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$. Силы $\vec{S}_D$ и $\vec{S}_C$ проектируются не в натуральную величину, поэтому их проекции на плоскость XAУ обозначены с двумя штрихами. Модули этих проекций равны:

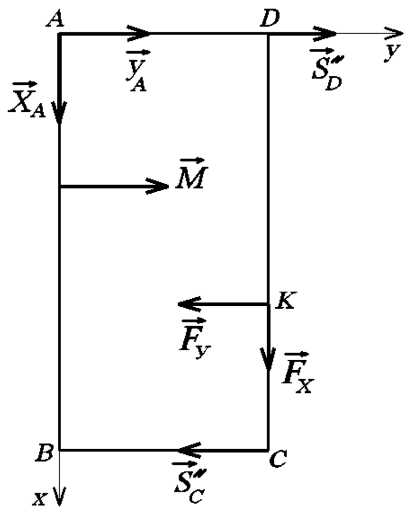


Рис. С7е

$$S_C^{//} = S_C \cos\beta \quad и \quad S_D^{//} = S_D \sin\alpha\,.$$

Составляем уравнение моментов всех сил относительно точки пересечения оси Z с плоскостью XAУ, т.е. относительно точки А:

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = \sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \qquad S_C \cos\beta \cdot 6 + F_X \cdot 3 + F_y \cdot 4 + M_Z = 0. \qquad (6)$$

Из уравнения (5) определяем:

$$S_C = \frac{Q\cdot 6 - F_Z\cdot 4 + G\cdot 3 + M_y}{6\sin\beta} = \frac{3\cdot 6 - 1\cdot 4 + 1\cdot 3 + 1}{6\cdot \sin 45^\circ} = 4{,}26\,кН\,.$$

Из уравнения (4) находим:

$$S_D = \frac{-F_Z\cdot 3 - S_C \sin\beta\cdot 3 + (G+Q)\cdot 1{,}5 + M_X}{3\cos\alpha} =$$

$$= \frac{-1\cdot 3 - 4{,}26\cdot\sin 45^\circ\cdot 3 + (1+3)\cdot 1{,}5 + (-3)}{3\cdot\cos 45^\circ} = -3{,}48\,кН.$$

Из уравнения (2) вычисляем:

$$Y_A = F_y + S_C\cos\beta - S_D\sin\alpha = 3 + 4{,}26\cdot\cos 45^\circ - (-3{,}48)\cdot\cos 30^\circ = 7{,}75\,кН.$$

И, из уравнения (3) определяем:

$$Z_A = Q + G - F_Z - S_C \sin\beta - S_D \cos\alpha = 1 + 3 - 1 - 4{,}26 \cdot \sin 45^\circ - (-3{,}48) \cdot \cos 30^\circ = 3\,\kappa H.$$

Ответ: $X_A = -2\,\kappa H$; $У_A = 7{,}75\,\kappa H$; $Z_A = 3\,\kappa H$; $S_C = 4{,}26\,\kappa H$; $S_D = -3{,}48\,\kappa H$.

8. ЗАДАНИЕ С8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ СПОСОБОМ РИТТЕРА.

Найти способом Риттера усилия в стержнях плоской фермы. Данные для решения приведены в табл. С8-1. Схемы ферм представлены на рис. С8а.

Указание: Номер схемы на рис. С8а соответствует последней цифре шифра “б”.

Таблица С8-1

Цифра шифра “а”	**Нагрузки**					**Определить усилия в стержнях**			
	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$	$\mathbf{P_4}$	$\mathbf{P_5}$				
	кН								
1	2	1	2	0	0	1	3	4	6
2	1	2	0	1	0	3	4	5	6
3	2	2	0	0	1	1	2	4	5
4	1	0	2	2	0	2	3	5	6
5	2	0	1	0	2	1	2	3	6
6	2	0	0	2	1	1	4	5	6
7	0	1	1	2	0	2	3	4	5
8	0	2	1	0	2	1	2	5	6
9	0	2	0	2	1	1	3	4	5
0	0	0	2	2	2	2	4	5	6

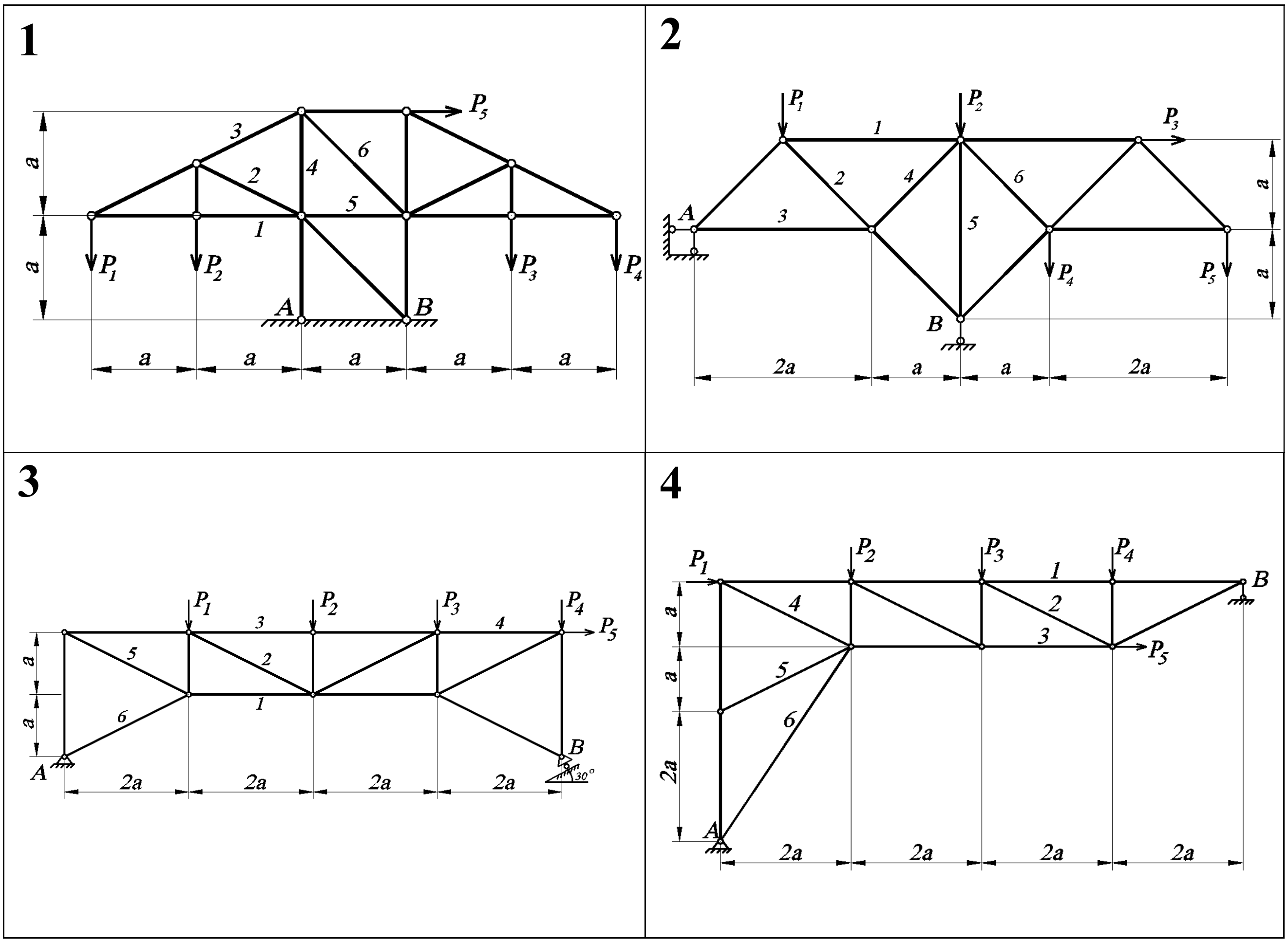
Расчет плоской фермы

Рассчитать ферму – значит определить реакции опор и усилия во всех ее стержнях. Расчет усилий в стержнях фермы методами статики может быть произведен только для статически определимых ферм. Чтобы ферма была статически определимой, необходимо, чтобы число неизвестных составляющих опорных реакций не превосходило трех, а число стержней S и число узлов n - связаны соотношением

$$S = 2n - 3\,.$$

Будем полагать, что заданные силы приложены в узлах фермы и лежат в одной плоскости с фермой; трение в шарнирах отсутствует. При выполнении этих условий стержни будут или сжаты, или растянуты, следовательно, реакции стержней будут совпадать по направлению со стержнями.

Существуют три способа расчета статически определимых ферм: способ вырезания узлов, построение диаграммы Максвелла-Кремоны, метод Риттера (метод сечений). На следующем примере демонстрируется наиболее распространенный аналитический метод Риттера (метод сечений). При расчете ферм методом сечений рекомендуется следующая последовательность действий:



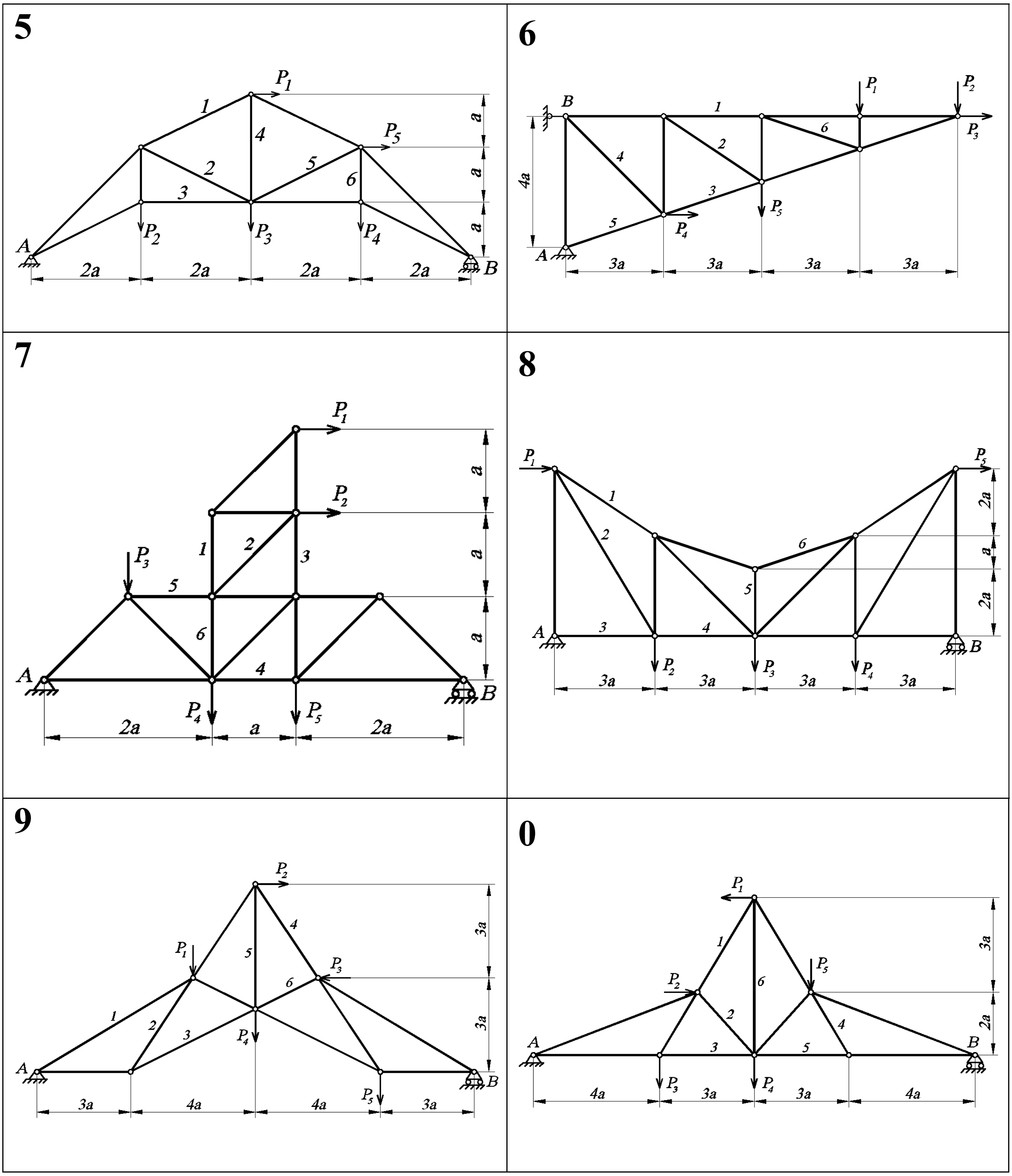


Рис. С8а

1) определяем геометрическую неизменяемость фермы, проверяя указанную выше зависимость между стержнями и узлами фермы;

2) вычисляем опорные реакции, рассматривая равновесие фермы как твердого тела, находящегося под действием плоской системы сил: для этого составляем три уравнения равновесия;

3) разрезаем мысленно ферму, к которой приложены все внешние силы (включая силы реакции связей) на две части так, чтобы число разрезанных стержней не превышало трех; заменяем действие отброшенной части искомыми усилиями стержней, полагая все стержни растянутыми;

4) составляем уравнения равновесия для рассматриваемой части фермы таким образом, чтобы в каждое уравнение входило одно неизвестное усилие: для этого составляем уравнения моментов относительно точек, где пересекаются линии действия двух неизвестных усилий (точки Риттера); если два стержня параллельны, то составляем уравнение проекций векторов сил на ось, перпендикулярную к этим стержням, в которое также войдет одно неизвестное усилие;

5) решая каждое из составленных уравнений, находим искомое усилие в стержнях: если в ответе получается знак “минус”, то это означает, что стержень сжат, а не растянут.

Пример выполнения задания С8

Определить реакции опор фермы от заданной нагрузки, а также усилия в стержнях фермы 1, 2, 3, 4, 5, если $P_1 = 10$ кН, $P_2 = 20$ кН, $P_3 = 40$ кН (рис. С8б).

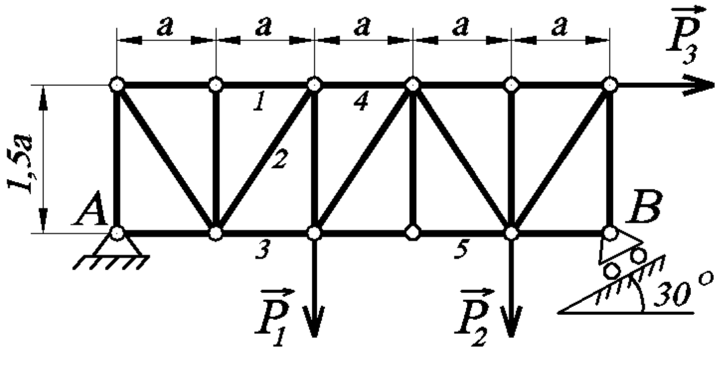


Рис. С8б

Решение.

1. Проверяем геометрическую неизменяемость фермы:

$$S = 21;\ n = 12;\ S = 2n - 3;\ 21 = 21.$$

Вывод: ферма статически определима и геометрически неизменяема.

2. Определение реакций опор

Составляем расчетную схему для определения опорных реакций: для этого мысленно отбросив связи в точках А и В, заменяем их силами реакций. В точке А линия действия реакции опоры неизвестна, поэтому определяем ее составляющие по координатным осям $\vec{X}_A$ и $\vec{У}_A$. Опора В – подвижный цилиндрический шарнир, линия действия ее реакции известна – она направлена перпендикулярно наклонной поверхности, по которой возможно перемещение этой опоры. Добавив к активным (задаваемым) силам P_1, P_2, P_3 реакции опор А и В, получим следующую расчетную схему (рис. С8в).

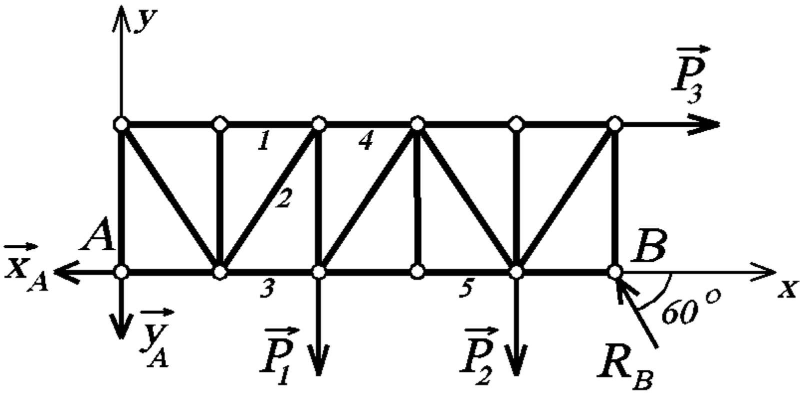


Рис. С8в

Силы, приложенные к ферме, расположены в одной плоскости. Составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \qquad -X_A + P_3 - R_B \cos 60^\circ = 0, \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \qquad -У_A - P_1 - P_2 + R_B \sin 60^\circ = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; \qquad R_B \cdot 5a \cdot \sin 60^\circ - P_1 \cdot 2a - P_2 \cdot 4a - P_3 \cdot 1{,}5a = 0. \qquad (3)$$

Из уравнения (3) определяем реакцию подвижного шарнира В:

$$R_B = \frac{2 \cdot P_1 + 4 \cdot P_2 + 1{,}5 \cdot P_3}{5 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{2 \cdot 10 + 4 \cdot 20 + 1{,}5 \cdot 40}{5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 36{,}9\,кН.$$

Из уравнения (2) определяем вертикальную составляющую опорной реакции в точке А:

$$У_A = -P_1 - P_2 + R_B \sin 60^\circ = -10 - 20 + 36{,}9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\,кН\ .$$

Из уравнения (1) определяем горизонтальную составляющую опорной реакции в точке А:

$$X_A = P_3 - R_B \cos 60^\circ = 40 - \frac{36{,}9}{2} = 21{,}5\,кН\ .$$

Примечание. При расчетах фермы вычисленные в первую очередь силы реакций связей присоединяем к активным действующим на ферму силам.

3. Определение усилий в стержнях фермы

Для определения усилий в стержнях 1, 2, 3 (рис. С8г) делаем разрез I-I и рассматриваем равновесие одной из частей фермы, причем действие отброшенной части заменяем действием реакций $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ и $\vec{S}_3$ перерезанных стержней. Целесообразно рассматривать равновесие той части фермы, для которой объем вычислительной работы меньше (в данном случае рассматриваем левую часть фермы). Будем полагать, что все стержни растянуты, тогда их реакции будут направлены в сторону отброшенной части фермы.

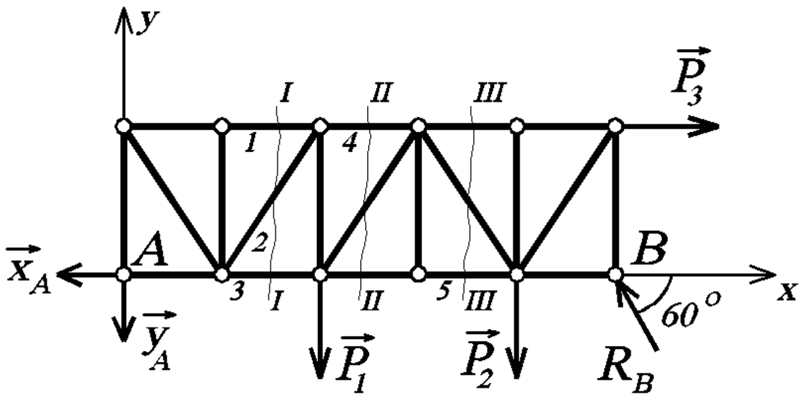


Рис. С8г (начало)

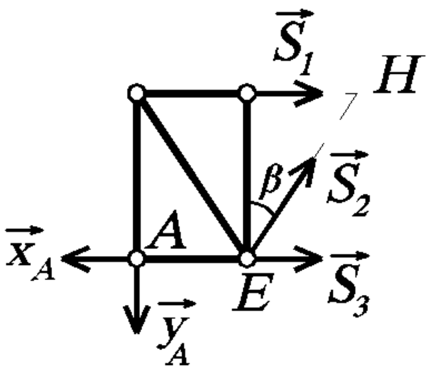


Рис. С8г (окончание)

Для определения $\vec{S}_1$ составляем уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия $\vec{S}_2$ и $\vec{S}_3$, т.е. точки Е:

$$\sum M_E(\vec{F}_i) = 0;\ \ У_A \cdot a - S_1 \cdot 1{,}5a = 0\ ,$$

$$S_1 = \frac{У_A}{1{,}5} = \frac{2}{1{,}5} = 1{,}33\,кН.$$

Для определения $\vec{S}_3$ составляем уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$, т.е. точки Н:

$$\sum M_H(\vec{F}_i) = 0; \quad S_3 \cdot 1{,}5a + У_A \cdot a - X_A \cdot 1{,}5a = 0$$

Сокращая на a находим:

$$S_3 = \frac{1{,}5 \cdot X_A - У_A \cdot 1}{1{,}5} = \frac{1{,}5 \cdot 21{,}5 - 2 \cdot 1}{1{,}5} = 20{,}2\,кН.$$

Для определения $\vec{S}_2$ спроектируем все силы на ось Ау:

$$\sum F_{iy} = 0; \qquad S_2 \cos\beta - У_A = 0$$

Из расчетной схемы определяем $\cos\beta$:

$$\cos\beta = \frac{1{,}5a}{EH} = \frac{1{,}5a}{\sqrt{2{,}25a^2 + a^2}} = 0{,}83.$$

$$S_2 = \frac{У_A}{\cos\beta} = \frac{2}{0{,}83} = 2{,}41\,кН.$$

Для определения усилия в стержне 4 делаем сечение II – II и рассматриваем равновесие левой части фермы (рис. С8д). Составляем уравнение моментов сил относительно точки пересечения линий действия $\vec{S}_6$ и $\vec{S}_7$ (точка Риттера G):

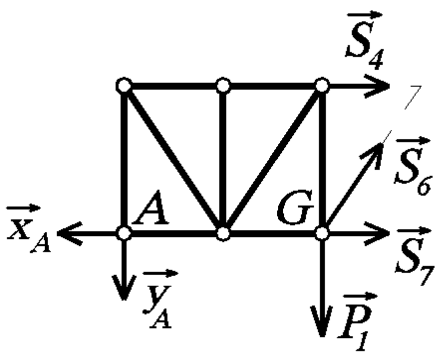


Рис. С8д

$$\sum M_G(\vec{F}_i) = 0; \quad У_A \cdot 2a - S_4 \cdot 1{,}5a = 0$$

$$S_4 = \frac{2 \cdot У_A}{1{,}5} = \frac{2 \cdot 2}{1{,}5} = 2{,}67\,кН.$$

Для определения усилия в стержне 5 делаем сечение III – III и рассматриваем равновесие правой части фермы (рис. С8е). Составляем уравнение моментов сил относительно точки пересечения линий действия $\vec{S}_8$ и $\vec{S}_9$ (точка Риттера N):

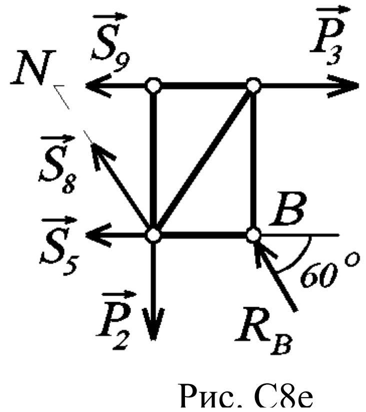


Рис. С8е

$$\sum M_N(\vec{F}_i) = 0; \quad R_B \cdot 2a \cdot \sin 60^\circ - R_B \cdot 1{,}5a \cdot \cos 60^\circ - -S_5 \cdot 1{,}5a - P_2 \cdot a = 0,$$

$$S_5 = \frac{2 \cdot R_B \cdot \sin 60^\circ - 1{,}5 \cdot R_B \cdot \cos 60^\circ - P_2}{1{,}5} =$$

$$= \frac{2 \cdot 36{,}9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1{,}5 \cdot 36{,}9 \cdot \frac{1}{2} - 20}{1{,}5} = -10{,}5\,кН.$$

Ответ: $X_A = 21{,}5\,кН$; $У_A = 2\,кН$; $R_B = 36{,}9\,кН$; $S_1 = 1{,}33\,кН$; $S_2 = 2{,}41\,кН$; $S_3 = 20{,}2\,кН$; $S_4 = 2{,}67\,кН$; $S_5 = -10{,}5\,кН$.

Вывод: Из выполненных расчетов следует, что стержни 1-4 под действием активных сил и сил реакций связей растянуты, а стержень 5 сжат ($S_5 < 0$). Правильность выполненных расчетов можно проверить, используя другие методы составления уравнений равновесия механической системы под действием произвольной плоской системы сил.

9. ЗАДАНИЕ С9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

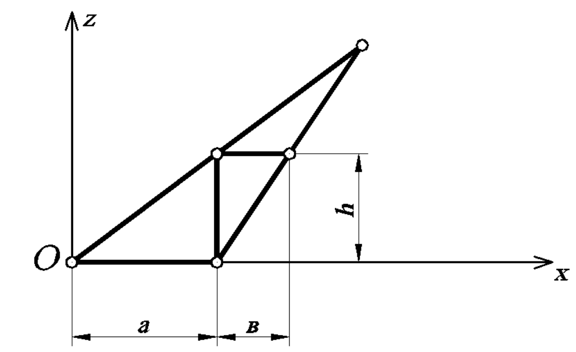
Найти координаты центра тяжести: плоской фермы, составленной из тонких однородных стержней (варианты 1, 2), плоской (варианты 3-7) или пространственной (варианты 8, 9 и 0) фигур, показанных на рис. С9а. В вариантах 1, 2 размеры указаны в метрах, в других вариантах – в сантиметрах. Данные для расчета приведены в табл. С9-1.

Указание: номер варианта на рис. С9а соответствует последней цифре шифра “б”.

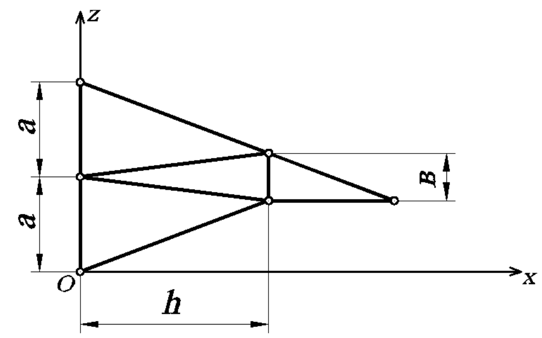
Таблица С9-1

Цифра шифра “а”	**а**	**в**	**d**	**h**
0	6	2	1	10
1	8	5	2	12
2	6	3	1,5	8
3	8	4	0,9	11
4	6	4	1,2	9
5	10	6	0,8	7
6	8	6	1,4	5
7	10	5	1,7	6
8	7	5	1,6	3
9	10	4	1,8	4

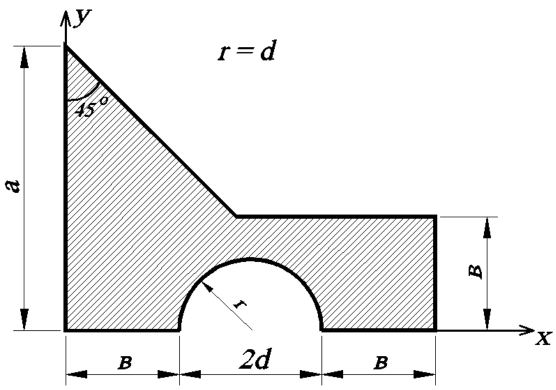
1



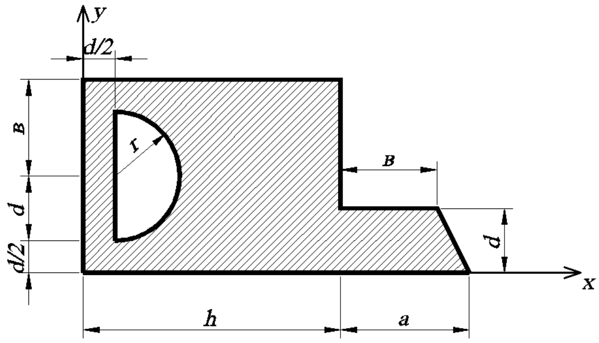
2



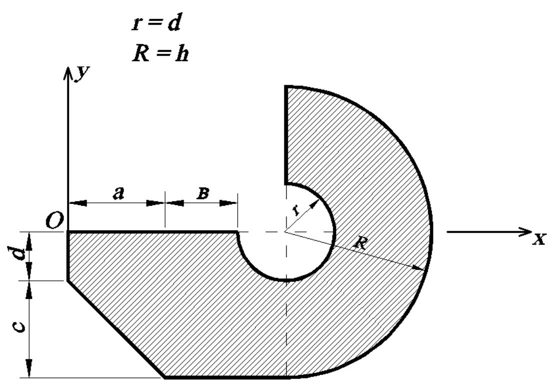
3



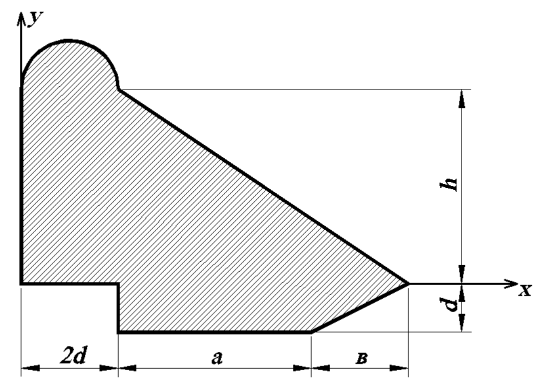
4



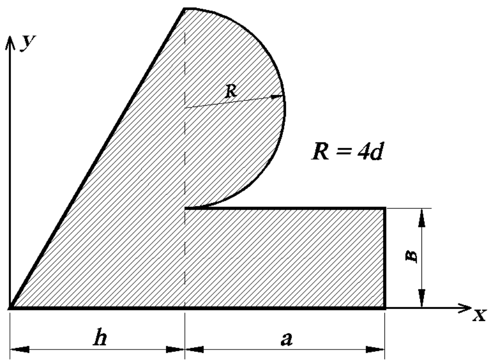
5



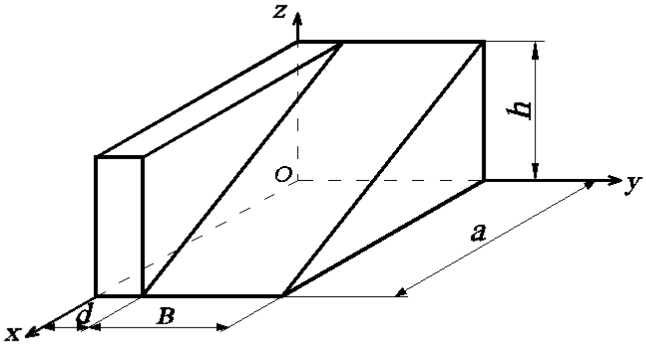
6



7



8



к оглавлению

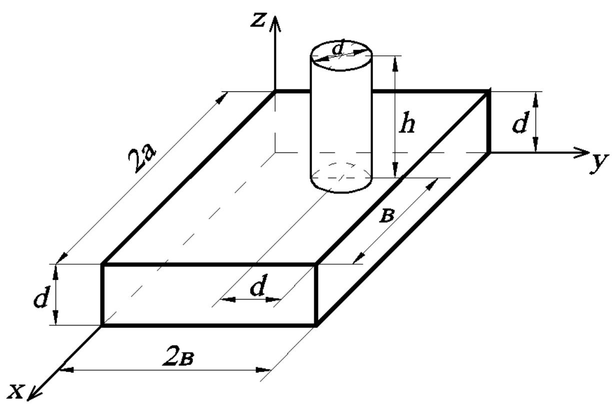
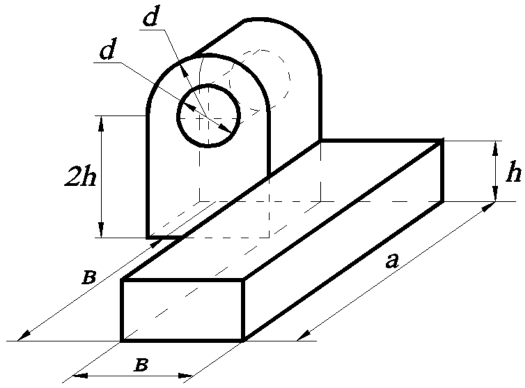
9 	**0** 

Рис. С9а

Краткие методические указания к решению задач по определению координат центра тяжести твердых тел

В случаях, когда объемы, площади или длины каждой частицы тела, а также их центры тяжести могут быть определены точно, координаты центра тяжести тела определяются по формулам:

а) для однородного твердого тела

$$x_C = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} x_i V_i, \quad y_C = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} y_i V_i, \quad z_C = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} z_i V_i, \tag{1}$$

где V – объем всего тела, V_i – объем i *- ого* элемента тела,

x_i, y_i, z_i - координаты центра тяжести i *- ого* элемента; n – количество элементов.

б) для однородной плоской фигуры, лежащей в плоскости xy:

$$x_C = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} x_i S_i, \qquad y_C = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} y_i S_i, \tag{2}$$

где S – площадь плоской фигуры, $\sum_{i=1}^{n} x_i S_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i S_i$ – статические моменты i *– ой* площади относительно координатных осей x и y соответственно; n – количество элементов площадей.

в) для однородной линии

$$x_C = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n} x_i l_i, \quad y_C = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n} y_i l_i, \quad z_C = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n} z_i l_i, \tag{3}$$

где $L = \sum_{i=1}^{n} l_i$ – длина всех элементов тела, l_i – длина i – *ого* элемента тела; n – число линейных элементов.

Положение центра тяжести некоторых твердых тел простейшей геометрической формы:

а) центр тяжести площади однородного прямоугольника расположен в точке пересечения его диагоналей;

б) центр тяжести площади однородного треугольника находится в точке пересечения его медиан;

в) центр тяжести площади однородного кругового сектора (рис. С9б) расположен на оси симметрии и имеет координаты: $x_C = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$, $y_C = 0$, где r – радиус окружности, α – половина центрального угла (здесь – в радианах!).

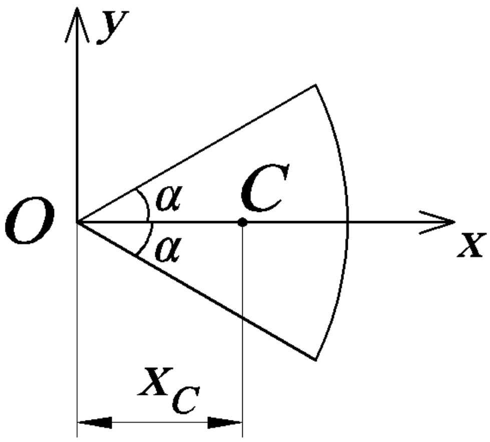


Рис. С9б

Наиболее распространенным приемом использования формул (1), (2) является условное разложение однородного твердого тела на такие элементы, положение центра тяжести каждого из которых либо известно, либо легко может быть определено. В случаях, когда тело имеет пустоты или вырезы, целесообразно представлять тело не суммой, а разностью отдельных его элементов.

Если данное тело имеет плоскость или ось или центр симметрии, то центр тяжести такого тела лежит соответственно в этой плоскости, на этой оси или в этом центре симметрии. Поэтому, для упрощения вычислений при решении задач, плоскости симметрии всегда нужно выбирать за одну из координатных плоскостей, а ось симметрии – за одну из координатных осей.

Пример выполнения задания на определение положения центра тяжести тела

Определить координаты центра тяжести плоской фигуры, изображенной на рис. С9в. Размеры на этом рисунке указаны в сантиметрах. Координаты вычислить с точностью до четырех значащих цифр.

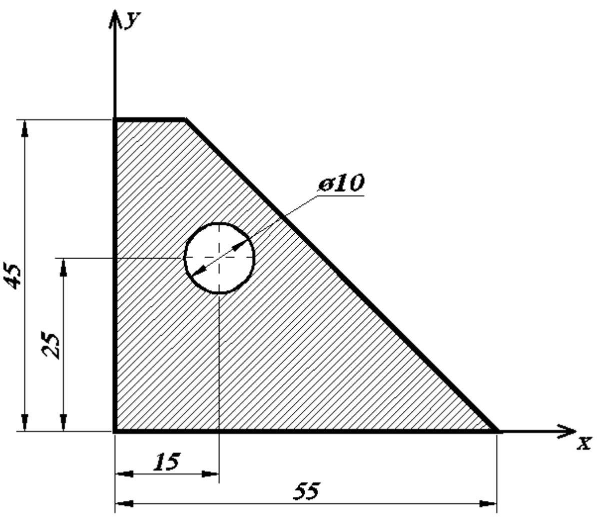


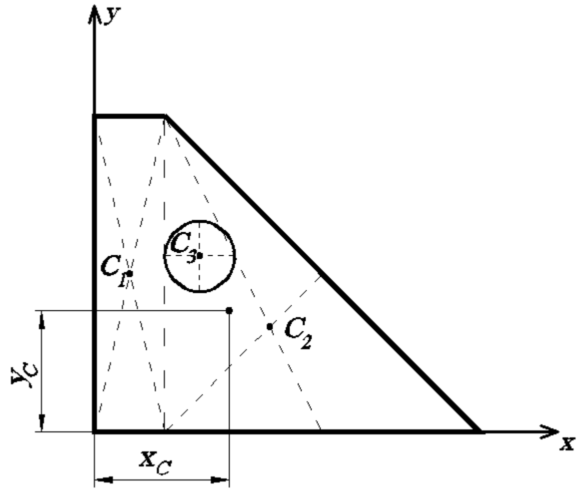
Рис. С9в

Решение.

Координаты центра тяжести плоской фигуры определяем по формулам:

$$x_C = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} x_i S_i, \qquad y_C = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} y_i S_i, \qquad (1)$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, делим площадь на отдельные элементы, центры тяжести которых известны. В данном случае таких элементов будет три: прямоугольник с центром в точке C_1, треугольник с центром в точке C_2 и круг, центр которого в точке C_3 (рис. С9г). Площадь круга, вырезанного из площади плоской фигуры, считаем отрицательной.



Вычисляем площади элементов плоской фигуры:

1) прямоугольника

$$S_1 = 10 \cdot 45 = 450\ см^2;$$

2) треугольника

$$S_2 = \frac{45 \cdot 45}{2} = 1012,5\ см^2;$$

3) круга

$$S_3 = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 78{,}5\ см^2.$$

Рис. С9г

Центры тяжести рассматриваемых элементов плоской фигуры имеют следующие координаты:

1) прямоугольника $x_1 = 5\ см,\ y_1 = 22{,}5\ см$,

2) треугольника $x_2 = 10 + \dfrac{55-10}{3} = 25\ см,\ y_2 = \dfrac{45}{3} = 15\ см$,

3) круга $x_3 = 15\ см,\ y_3 = 25\ см$.

Подставляя значения площадей фигур и их координат в формулы (1), получаем:

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 - x_3 S_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{5 \cdot 450 + 25 \cdot 1012{,}5 - 15 \cdot 78{,}5}{450 + 1012{,}5 - 78{,}5} = 19{,}06\ см;$$

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 - y_3 S_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{22{,}5 \cdot 450 + 15 \cdot 1012{,}5 - 25 \cdot 78{,}5}{450 + 1012{,}5 - 78{,}5} = 16{,}87\ см.$$

Ответ: $x_C = 19{,}06\ см$; $y_C = 16{,}87\ см$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теоретическая механика. Терминология. Буквенные обозначения величин. Сборник рекомендуемых терминов. Выпуск 102. М., 1984.
2. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М., 1983.
3. Павловский М.А., Путята Т.В. Теоретическая механика. Киев, 1985.
4. Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. Киев, 1990.
5. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М., 1986.
6. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. ч.1. М., 1984.
7. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 2. М., 1984.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под ред. А.А.Яблонского. М., 1985.
9. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. т.1. М., 1984 и т.2. М., 1985.
10. Сборник задач по теоретической механике / Бражниченко Н.А., Кан В.Л., Минцберг и др. М., 1974.

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения расчетно-графических и контрольных
работ по теоретической механике
(раздел «Статика»)

Составители:
Мущанов Владимир Филиппович
Евдокимов Анатолий Иванович
Стифеев Федор Федорович
Фоменко Серафим Александрович